SÉRIE VIII. — TOME V. N° 6. JUIN 1944

LE JOURNAL DE PHYSIQUE ET LE RADIUM

SUR LA VARIATION THERMIQUE DU CYCLE D'HYSTÉRÈSE DE QUELQUES FERROMAGNÉTIQUES

I. Les phénomenes au voisinage du point de Curie

Par ROBERT FORRER et RAYMOND BAFFIE.

Sommaire. — Des études antérieures avaient montré que, pour certains corps, le champ coercitif h_c, décroissant généralement quand la température croît, ne s'annule pourtant pas au point de Curie ferromagnétique θ_f; il garde à θ_f une certaine valeur finie h_c^0 et l'on peut définir un θ_h par extrapolation de la courbe des h_c. $\theta_h - \theta_f = \mathfrak{S}$ est souvent de l'ordre de quelques dizaines de degrés.

De nouvelles expériences ont été entreprises pour déterminer l'influence des traitements mécaniques et thermiques, des additions dans les alliages et de la création des surstructures sur ce phénomène. Elles ont confirmé l'existence des deux types A et B suivant que $\mathfrak{S}$ a une valeur nulle ou finie notable. Des déformations, quelle que soit leur origine (pression ou traction, écrouissage ou déformation microscopique par ségrégation), n'ont pas d'influence sur le phénomène de h_c^0.

Un nouveau type C de variation thermique de h_c trouvé au courant de ces recherches avec l'apparition d'un coude peut être considéré comme combinaison des types A et B. Il y a donc dans une même substance deux mécanismes de renversement. Il est assez probable que le type A a lieu quand le renversement se fait par rotation, car le coefficient K d'anisotropie tend rapidement vers zéro avec l'approche vers le point de Curie pour le nickel (type A). Le type B avec h_c^0 fini peut alors être attribué au mécanisme de renversement par déplacement de paroi. Dans ce mécanisme la résistance au déplacement est donnée par des « accidents » qui gardent toute leur valeur vers le point de Curie, d'où h_c^0 fini. Dans le type combiné C le renversement s'opère suivant le mécanisme qui demande le moindre champ et si les variations thermiques en sont différentes, comme c'est le cas pour les types A et B, on peut obtenir leur juxtaposition avec un coude comme il a été observé.

Dans certains alliages a été observé le dédoublement des points de Curie (type D), phénomène qui est attribué à l'existence de deux ferromagnétiques avec des points de Curie différents. Le type D démontre donc l'existence d'une *ségrégation* dans des alliages qui, jusqu'à présent ont été considérés comme homogènes.

A. Historique. — Cette étude est en quelque sorte la suite des travaux publiés en 1930 [1] et 1931 [2].

Les premières expériences [1] avaient montré que le champ coercitif h_c qui décroît quand la température s'élève, ne disparaît pas avec l'aimantation spontanée. Au point de Curie ferromagnétique θ_f, défini par la disparition de l'aimantation spontanée, le champ coercitif h_c conserve souvent une valeur finie assez notable que nous désignerons par h_c^0. La variation thermique assez monotone de h_c permet de définir par extrapolation vers zéro un point de Curie du champ coercitif θ_h, supérieur à θ_f. Nous allons désigner par $\mathfrak{S}$ la différence $\theta_h - \theta_f$.

D'autre part on définit un point de Curie paramagnétique θ_p par extrapolation de la droite de Weiss dans la région paramagnétique, donnee par $\chi(T - \theta_p) = C$.

Le fait que les différences $\theta_h - \theta_f$ et $\theta_p - \theta_f$ étaient du même ordre de grandeur incitait à admettre l'identite de θ_h et de θ_p. Elle semblait indiquer que le mécanisme du renversement dans le champ coercitif à l'état ferromagnétique est lié au mécanisme du paramagnétisme.

Pour vérifier l'hypothèse de l'identité de θ_h et θ_p, on avait déterminé [2] θ_f, θ_h et θ_p sur un nickel-cuivre à 72 pour 100 de Cu, où l'on savait que la différence $\theta_p - \theta_h$ est grande. On avait trouvé en effet l'identité de θ_p avec θ_h à l'erreur d'expérience près, avec une grande différence $\theta_h - \theta_f = \mathfrak{S} = 29°,5$.

La figure 1 donne le graphique de la variation thermique de σ_R^2 et de h_c qui permet la détermination des deux grandeurs θ_f et θ_h. On remarque

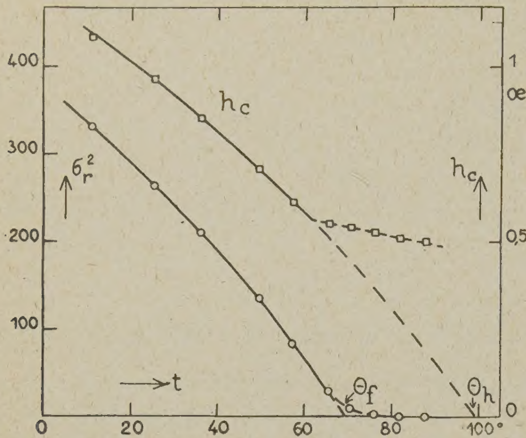


Fig. 1. — Variation thermique de σ_R^2 et de h_c d'un nickel-cuivre à 70 pour 100 de cuivre et la détermination de θ_f et θ_h.

d'ailleurs qu'au-dessus de θ_f on peut observer encore une faible aimantation rémanente, due probablement à une faible inhomogénéité de l'alliage. A ces températures $t > \theta_f$, le champ coercitif reste sensiblement constant.

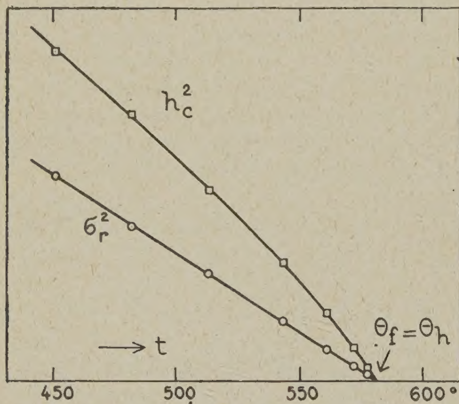


Fig. 2. — Détermination de θ_f et θ_h par la variation thermique de σ_R et de h_c de la magnétite.

Pour la magnétite, par contre, θ_p coïncide sensiblement avec θ_f d'après les mesures du paramagnétisme de Kopp [3]. Et la variation thermique de σ_R et h_c avait donné également [2] la coïncidence de θ_f et θ_h (*fig.* 2). Ici aussi θ_h et θ_p sont identiques.

Pourtant la coïncidence de θ_h et θ_p est une constatation quelque peu formelle. On voit mal comment on pourrait rattacher le mécanisme du champ coercitif, dû à la résistance opposée à l'avancement d'une paroi de Bloch, par exemple, au mécanisme du paramagnétisme où l'inversion des moments est essentiellement spontanée. On a donc été incité à reprendre les expériences sur la variation thermique du champ coercitif et de les étendre à d'autres alliages et d'autres combinaisons définies ferromagnétiques.

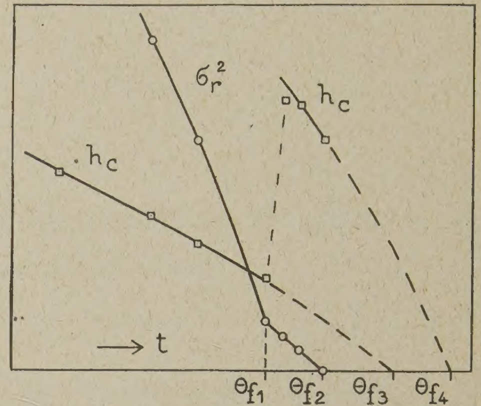


Fig. 3. — Dédoublement des points de Curie d'un nickel recuit.

2° Lorsqu'on a voulu voir si la différence $\theta_h - \theta_f = \mathfrak{I}$ dépend du traitement mécanique ou thermique [4], on a constaté que dans des nickels recuits le champ coercitif, après s'être arrêté à la valeur h_c^0 pour $t = \theta_{f_1}$, prend, quand on augmente la température, rapidement une valeur notablement plus élevée, pour décroître ensuite de nouveau (*fig.* 3).

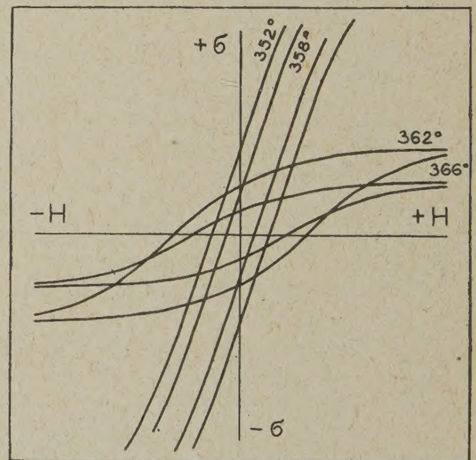


Fig. 4. — La forme des cycles du nickel recuit avant et après θ_{f_1}.

Ce curieux phénomène d'un dédoublement des points de Curie ne peut pas s'expliquer autrement que par l'existence simultanée de deux substances ferromagnétiques dont les points de Curie sont peu

différents. Cette hypothèse est appuyée par le fait que les cycles au-dessus de θ_{f_1} sont très inclinés. En effet, à $t > \theta_{f_1}$, quand la substance caractérisée par θ_{f_1} n'est plus ferromagnétique, la substance caractérisée par θ_{f_2} est disposée nécessairement en grains séparés; elle a donc un grand champ démagnétisant, ce qui a pour effet d'incliner notablement le cycle d'hystérèse (*fig.* 4).

B. **Les objets d'étude**. — A différentes températures les formes des cycles d'hystérèse restant à peu près semblables, nous nous bornerons à déterminer l'aimantation spécifique rémanente σ_R et le champ coercitif h_c.

1. Le champ coercitif $h_c.h_c$ est défini par le passage du point figuratif sur un cycle limité par la valeur $\sigma = 0$. Or, étant donné que dans chaque domaine de Weiss l'aimantation est saturée ($\sigma = \sigma_\infty$), on ne peut obtenir $\sigma = 0$ que par l'inversion d'une moitié de l'aimantation. On peut envisager deux cas : dans le premier cas cette inversion se fait par déplacement de la paroi de Bloch, h_c est donc équivalent à la résistance opposée à ce déplacement par des « obstacles » ou « accidents » qui pourraient être donnés par des tensions intérieures irrégulières, des inclusions, des trous, etc. Dans le second cas, l'inversion se fait par rotation irréversible de l'aimantation contre les forces magnétocristallines. On a montré que dans les alliages on a affaire en général avec des déplacements de paroi.

2. L'aimantation rémanente σ_R. — La grandeur de l'aimantation rémanente est donnée par la distribution dans l'espace des directions de l'aimantation dans les différents domaines. Tant que cette distribution ne change pas, le rapport $\frac{\sigma_R}{\sigma_\infty}$ en général de l'ordre de 0,5, devrait rester co› tant, quand la température varie. Puisque la saturation est inaccessible aux mesures par le magnétomètre, on a dû renoncer à donner ce rapport. Mais la forme de la courbe d'aimantation en fonction de la température change peu d'une substance à l'autre. Elle a une allure parabolique vers le point de Curie. Une déviation de cette forme indiquerait donc un changement dans la distribution des forces cristallines ou des tensions internes.

En tous cas, la courbe de l'aimantation rémanente, ou mieux celle des carrés, souvent presque rectiligne, sert par extrapolation à la détermination du point de Curie ferromagnétique θ_f.

3. Le champ démagnétisant. — Dans la méthode du magnétomètre employée ici, la substance a nécessairement la forme d'un barreau relativement court. Son champ démagnétisant h_d est alors notable. Et pour la détermination de σ_R il faut soigneusement tenir compte de la grandeur de h_d. Dans le champ extérieur zéro on obtient une aimantation rémanente *apparente* σ_{R_a} (*fig.* 5) qui est simplement une grandeur proportionnelle au champ coercitif si le champ démagnétisant h_d au voisinage de σ_R est plus grand que le champ coercitif h_c.

Le coefficient angulaire du champ démagnétisant s'obtient expérimentalement en traçant la tangente initiale à la courbe anhystérétique, obtenue en superposant à divers champs continus un champ alternatif décroissant jusqu'à zéro. On a montré en effet expérimentalement [5] que pour un ellipsoïde cette tangente coïncide avec la droite du champ démagnétisant.

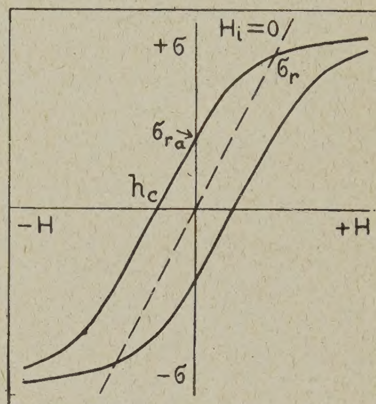


Fig. 5. — Inclinaison du cycle par le champ démagnétisant.

Le coefficient du champ démagnétisant de forme N, défini par $h_d = NJ$, est d'ailleurs indépendant de la température, puisque la forme de l'échantillon ne varie pas avec la température. Sa détermination expérimentale par la tangente initiale à la courbe anhystérétique a montré en effet sa constance pour les métaux et alliages.

4. Il est à noter que si l'on dépasse 400 ou 500°, des recuits qui changent la propriété des substances sont à craindre. De tels changements pourraient fausser l'interprétation des courbes obtenues.

C. **L'installation expérimentale**. — Les métaux et alliages sont étudiés sous forme de barreaux minces de 5 cm de longueur en général. Les substances en poudre sont tassées dans un tube en quartz.

Leur moment magnétique en fonction du champ est mesuré par un magnétogalvanomètre [6] qui permet un enregistrement semi-automatique assez rapide, ce qui est précieux si l'on veut tracer un grand nombre de cycles à diverses températures.

Les plus grands cycles (ceux à température ordinaire) peuvent être dessinés à une grandeur qui atteint 40 × 50 cm, ce qui donne une bonne précision relative. L'étalonnage se fait par comparaison à l'aide d'une substance d'intensité d'aimantation

connue par ailleurs. Pour cette raison et d'autres, la précision en valeur absolue est assez médiocre et l'erreur peut atteindre quelques pour cent.

La bobine de champ est constituée de trois parties (*fig.* 6). La première (*a*), bobinée directement sur la carcasse (*d*) à double paroi, parcourue par un courant d'eau, donne le champ continu et permet pour un court temps d'aller jusqu'à 1000 œrsteds. La deuxième (*b*) sert à la désaimantation par courant alternatif décroissant, et une troisième (*e*), d'un diamètre beaucoup plus grand que la première, est connectée en sens inverse avec elle et est dimensionnée de façon qu'elle forme avec la première un ensemble de bobine de moment extérieur nul. Ceci facilite grandement l'élimination des influences sur le magnétomètre.

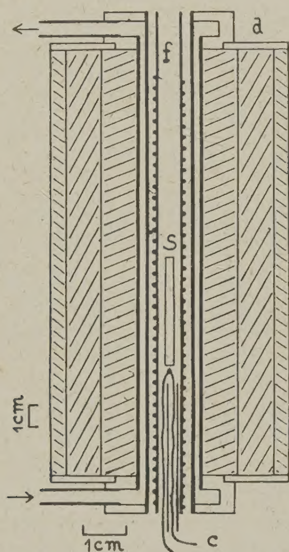


Fig. 6. — Ensemble des bobines avec four. (L'échelle horizontale est doublée.)

A l'intérieur de la carcasse à circulation d'eau se trouve le four (*f*) constitué par un tube de quartz avec enroulement en nichrome, bifilaire, pour éviter une influence magnétique sur la substance. Il doit avoir une grande uniformité de température dans la partie occupée par la substance à étudier. Si ce n'est pas le cas, on obtiendrait des résultats complètement faussés au voisinage du point de Curie. La constance de la temperature du four alimenté en alternatif est obtenue par l'emploi de lampes fer-hydrogène.

La température est mesurée par des couples thermoélectriques (*c*) (BTE-CTE d'Imphy ou Pt-Pt Rh) au moyen d'un potentiomètre.

D. **Nouvelles expériences**. — 1. Les deux types. — Dans le but de chercher une réponse aux diverses questions dont nous avons parlé à la page 4, nous avons entrepris un grand nombre de nouvelles expériences. Nous avions rencontré principalement deux types de variation thermique du champ coercitif près du point de Curie et pour ne pas trop charger ce mémoire par des descriptions, nous allons décrire ces types et essayer de ranger les nouveaux résultats suivant ces types.

Nous allons appeler type A celui où le champ coercitif h_c s'annule au point de Curie ferromagnétique, donc où $\theta_h = \theta_f$ (*fig.* 7).

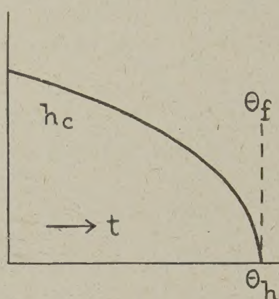


Fig. 7. — Type A où h_c s'annule à θ_f.

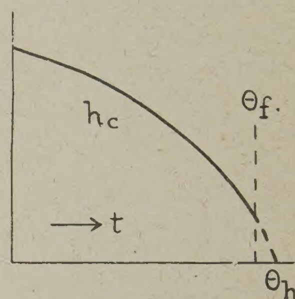


Fig. 8. — Type A₁, où θ_h dépasse très peu θ_f.

Dans beaucoup de cas, θ_h extrapolé dépasse un peu θ_f. $\theta_h - \theta_f$, que nous appellerons ϑ, est alors de quelques degrés et la courbure de la variation thermique de h_c est moins accentuée (*fig.* 8).

Ce type sera nommé A_1 à cause de sa parenté avec le type A. Il se peut que l'apparition d'un petit ϑ soit causée dans quelques cas par des erreurs d'expérience.

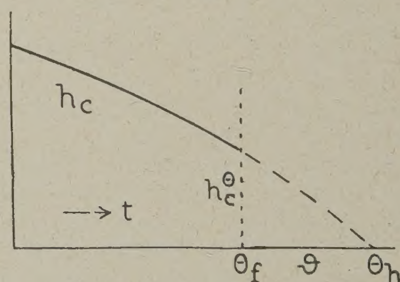


Fig. 9. — Type B, où $\theta_h - \theta_f = \vartheta$ est notable.

Nous allons appeler type B celui où le champ coercitif garde une grande valeur h_c^0 au point de Curie ferromagnétique θ_f. Sa variation thermique est encore moins courbée, souvent presque rectiligne, et permet une extrapolation vers θ_h. $\theta_h - \theta_f = \vartheta$ est souvent de quelques dizaines de degrés (*fig.* 9).

2. Influence de la pureté et des additions sur ϑ. — Un fil de *nickel*, provenant du carbonyl, fondu dans le vide et étiré par Heraeus, d'une grande pureté, a été étudié, recuit, avec grand

soin. θ_h et θ_f coïncident au dixième de degré. Ce nickel donne donc le type A.

Un nickel électrolytique en bande de 0,1 mm d'épaisseur montre le phénomene de h_c^0 fini. Mais à cause de la petitesse de $\mathfrak{I} = 3°$, nous le rangeons dans la catégorie du type A_1.

Je rappelle que le nickel Mond provenant aussi du carbonyl, mais traité industriellement, avait montré (*voir* sous [1]), recuit, un $\mathfrak{I} = 15°$ et, courbé et plié droit contre son élasticité, $\mathfrak{I} = 20°$. C'est nettement le type B.

Avec la pureté décroissante $\mathfrak{I}$ augmente donc de 0 à 20° pour le nickel.

Des expériences analogues ont été faites avec le *fer*. Mais à la suite de la situation élevée du point de Curie du fer ($\theta = 770°$), le fer subit au voisinage de θ des recuits qui modifient h_c. Les courbes de h_c qui étaient bien réversibles pour le nickel, ne le sont plus pour le fer. La détermination de θ_h est donc peu certaine.

Une bande de fer électrolytique de 0,1 mm d'épaisseur, montre le type A_1 ($\mathfrak{I} = 5°$ environ). Le fer Terry (*voir* sous [1]) avait donné $\mathfrak{I} = 14°$ et un fer provenant de J. Holtzer a donné $\mathfrak{I} = 20°$ environ, type B.

Comme pour le nickel, $\mathfrak{I}$ semble augmenter avec la pureté décroissante.

3. Influence de la déformation et de l'écrouissage sur $\mathfrak{I}$. — Le nickel ex-carbonyl qui, recuit, avait donné le type A ($\mathfrak{I} = 0$), garde ce type quand il est mis sous tension ou sous pression (de 6,4 kg : mm²); également si ce même fil est étiré à la rupture. Par contre, apparaît un petit phénomène de h_c^0 fini si ce fil a été tordu ou plié plusieurs fois ($\mathfrak{I} = 5°$, type A_1).

La déformation et l'écrouissage sont donc pratiquement sans influence sur ce phénomène. Le phénomène de h_c^0 est d'ailleurs indépendant de la grandeur absolue du champ coercitif qui, de l'ordre de 1 œrsted pour le nickel recuit, devient 20 œrsteds pour le nickel étiré et 30 œrsteds pour le nickel fortement tordu ou plusieurs fois plié.

Puisque l'alliage Ni-Cu à 70 pour 100 de Ni nous avait donné ce beau phénomène de h_c^0 avec $\mathfrak{I} = 27°$ (*fig.* 1), il était intéressant d'étudier quelques alliages de nickel avec des additions non magnétiques.

Un Ni-Al (fil Alumel du couple Chromel-Alumel) recuit 4 h à 820° a son point de Curie θ_f à 158°; son étude est donc facile et precise. La variation thermique de h_c donne $\theta_h = 160°$, donc $\mathfrak{I} = 2°$, type A_1. Il serait donc faux d'attribuer un grand h_c^0 généralement aux alliages. D'ailleurs, dans ce Ni-Al comme dans le Ni-Cu mentionné, Al et respectivement Cu sont en solutions solides dans l'alliage.

Un Ni-Be [7] (2,5 pour 100 de Be) montre un grand champ coercitif, de 126,4 œrsteds à 50° à la suite de la ségrégation provoquée par le revenu de 610 mn à 454°.

L'induction et le champ coercitif, déduits des graphiques publiés, donnent un faible h_c^0; $\mathfrak{I} = 5°$, type A_1. La ségrégation qui provoque une forte déformation agit comme elle et ne donne pas un grand phénomène h_c^0.

Dans une tôle de transformateur au ferrosilicium, on a pu constater, malgré les irréversibilités provoquées par le recuit dans cette région de température ($\theta_f = 737°$), un phénomène h_c^0 assez notable, $\mathfrak{I} = 17°$ environ. Mais à cause du θ élevé nous rangeons ce corps encore dans le type A_1.

Un alliage Fe-Ni-Al (provenance : Ugine) avec son grand champ coercitif (à $t = 20°$, $h_c = 400$ œrsteds) a donné une identité pour θ_f et θ_h, donc $\mathfrak{I} = 0$, type A. Ceci confirme les expériences sur le nickel déformé et le Ni-Be, à savoir les déformations ni macroscopiques, ni microscopiques ne provoquent le phénomène du grand champ coercitif au point de Curie h_c^0.

4. Quelques substances du type B. — Aucun de ces alliages nouvellement étudiés n'a donné franchement un grand h_c^0. Mais les expériences suivantes sur la pyrrhotine montrent qu'on a le droit de faire une distinction entre les types A et B, puisque nous les rencontrerons sur la même substance.

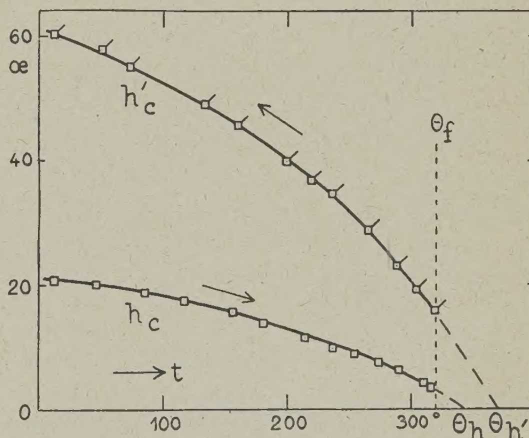


Fig. 10. — Variation thermique de h_c d'une pyrrhotine de Kisbanya.

Une pyrrhotine de Kisbanya (Hongrie) en grains de diverses grandeurs a donné les courbes reproduites dans la figure 10. A l'aller $h_c^{12°} = 20$ œrsteds, nous trouvons un faible $h_c^0 = 2,6$ œrsteds et $\mathfrak{I} = 22°$. Avant de tracer la courbe du retour, on a dépassé θ_f d'une douzaine de degrés en y restant 5 mn. (Les grandeurs sur la courbe *de retour* seront exprimées par $h_{c'}$, $\sigma_{r'}$, $h_c^{0'}$, $\mathfrak{I}$. Dans les figures, les points sur la courbe de retour porteront une flèche ♂, □↗.) Sur la courbe de retour, le champ coercitif a augmenté d'une manière générale

($h_c^{12°} = 60$ œrsteds), mais proportionnellement beaucoup plus vers le point de Curie ($h_c^0 = 15$ œrsteds), de sorte que la différence $\theta_h - \theta_f = \vartheta$ a considérablement augmenté : $\vartheta' = 48°$.

Le même phénomène a été trouvé, mais d'une manière encore plus marquée, pour une pyrrhotine de Norvège. En allant, h_c s'annule exactement à θ_f, on a donc le type A très pur avec $\vartheta = 0$, au retour $h_c^{0'}$ est devenu 30 œrsteds et $\theta_h - \theta_f$ est devenu remarquablement grand ($\vartheta' = 90°$). Nous avons donc ici un type B très marqué.

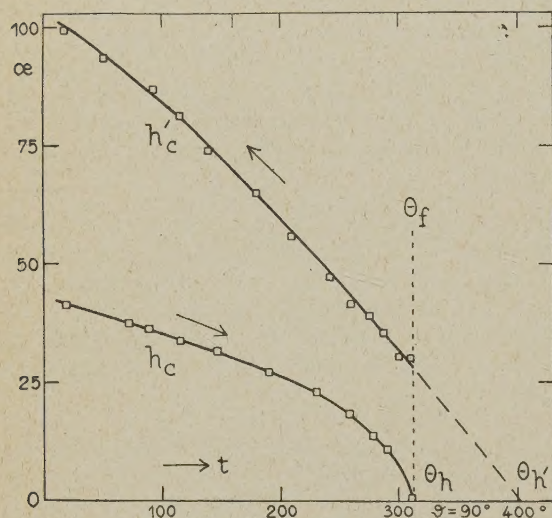


Fig. 11. — Pyrrhotine de Norvège.
Type A à l'aller et type B au retour.

Combinaisons. — Sans entrer dans le détail des courbes, qui sont souvent assez compliquées, nous signalons que les magnétites naturelles de différentes provenances ou artificielles donnent le plus souvent le type A ou quelquefois A_1. De même une sulfomagnétite Fe_2O_3FeS et un ferrite de lithium $2Fe_2O_3Li_2O$.

Le borure de fer Fe_2B (de M. Binet du Jassonneix) aussi est du type A. Par contre la cémentite Fe_3C (de M. Travers) montre un type B très marqué ($\vartheta = 90°$), ainsi que MnB (obtenu par électrolyse à chaud, de M. Andrieux) avec $\vartheta = 200°$, tandis que MnB (obtenu par aluminothermie, de M. Andrieux) donne un ϑ beaucoup plus faible ($\vartheta = 28°$). Nous reviendrons à une autre occasion sur la variation thermique du cycle de ces substances.

5. Découverte dans les ferronickels d'un nouveau type (type C) de variation thermique du champ coercitif. — Dans une série de *ferronickels* (mise à notre disposition par M. Chévenard, Imphy), deux alliages, à 33 et 37 pour 100 de Ni, ont donné, aussi bien à l'état recuit qu'à l'état trempé, un petit phénomène de h_c^0 avec un ϑ de l'ordre de 10°. Par contre un ferronickel à 34 pour 100 bien recuit a donné un type B bien marqué avec $\vartheta = 40°$ (*fig.* 12) et un h_c à peu près constant pour la faible aimantation au-dessus de θ comme pour le Ni-Cu (*voir* p. 97-98).

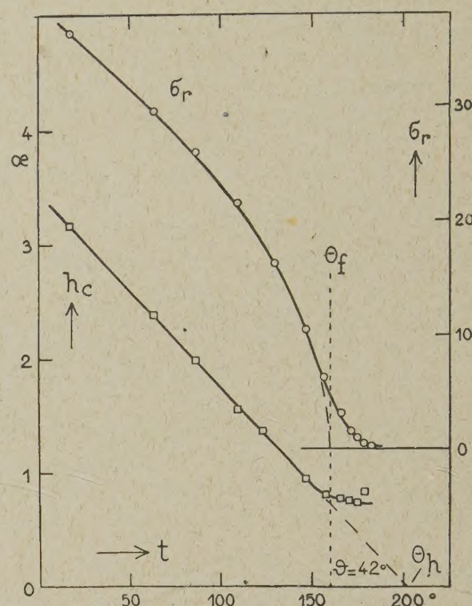


Fig. 12. — Type B dans un ferronickel à 34 pour 100 de Ni.

Or, dans plusieurs alliages que nous mentionnerons tout à l'heure, apparaît un nouveau type de variation thermique du champ coercitif, le type C (*fig.* 13). Quelques dizaines de degrés au-dessous de θ_f apparaît nettement un coude *c*. Les courbes, étant souvent presque rectilignes, permettent une extrapolation pas trop incertaine vers θ_h. La courbe *a* du type A ou A_1 située au voisinage du point de Curie θ_f mène par extrapolation vers θ_{h^a}, avec une différence $\theta_{h^a} - \theta_f = \theta^a$ nulle ou petite. La courbe *b* de la température ordinaire jusqu'au coude, du type B, donne par extrapolation θ_{h^b} avec la grande différence $\theta_{h^b} - \theta_f = \theta^b$.

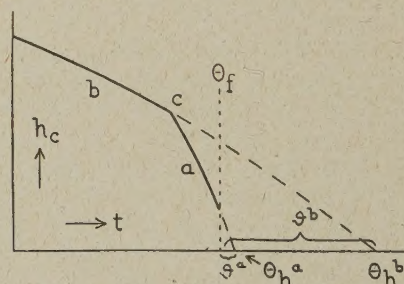


Fig. 13. — Type C. Juxtaposition des types A et B.

Un tel type combiné a été observé sur un ferro-

nickel du type « permalloy » (provenance : Aubert et Duval) recuit 1 h à 1000°, ensuite 12 h à 560° (*fig.* 14). Le coude C, situé à 530°, est très net.

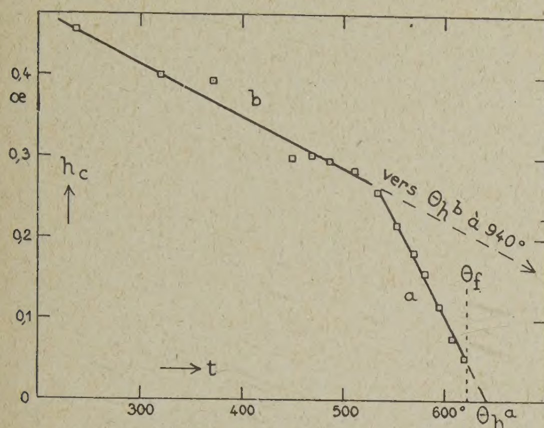


Fig. 14. — Variation thermique de h_c dans un permalloy recuit 1 h. à 1000° et 12 h. à 560°.

Avec $\theta_f = 622°$, les extrapolations des courbes de h_c donnent $\theta_{h^a} = 642°$ avec $\mathfrak{T}^a = 20°$ et $\theta_{h^b} = 940°$ environ avec $\mathfrak{T}^b = 320°$ environ.

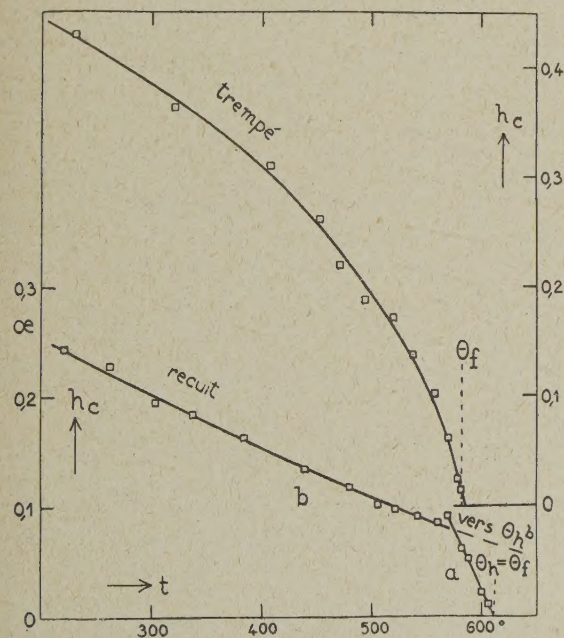


Fig. 15. — Effet sur la courbe de h_c d'un recuit prolongé et de la trempe (permalloy).

La différence d'allure des deux branches de la courbe est encore plus accentuée pour le même échantillon qui a subi un recuit prolongé (1 h à 1000°, 96 h de 620° à 500° et 48 h de 500° à 20°) (*fig.* 15). La courbe *b* de 20° à 570° est même devenue creuse et s'extrapole vers 820° environ. La courbe *a* donne avec la coïncidence de θ_f et de θ_{h^a} à 611° le type A pur. $\mathfrak{T}^b$ est de 210° environ. Il est curieux de constater qu'un point (à 570°) appartenant à la courbe *a* semble être situé au delà de la courbe *b*. Trempé à l'air après un recuit de 15 mn à 800°, ce même corps donne de nouveau une courbe convexe (*fig.* 15) du type A simple.

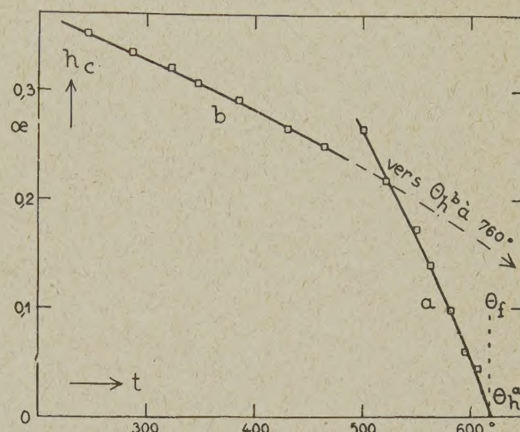


Fig. 16. — Le type C dans l'alliage $FeNi_3$ trempé.

Un alliage, de composition voisine, $FeNi_3$ (fondu dans le vide par M. Spielmann), montre également le type combiné C, mais à l'état trempé (*fig.* 16). Ici aussi un point à 500° situé dans la région de température de la courbe *b* est déjà placé sur la courbe *a*. Le même alliage, recuit 1 h à 1000° et refroidi lentement, 48 h entre 600 et 450°, ne donne que le type A_1 avec un faible $\mathfrak{T} = 90$.

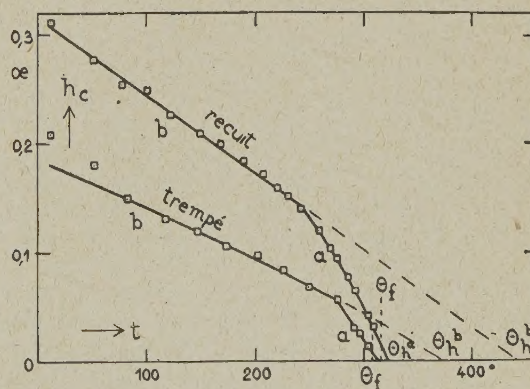


Fig. 17. — Le type C dans un ferronickel à 42 pour 100 de Ni.

Le même type combiné C s'est montré encore dans un ferronickel à 42 pour 100 de Ni. Ce cas est intéressant parce que, avec son point de Curie $\theta_f = 316°$ peu élevé, des changements du champ

coercitif par des recuits au moment de l'expérience ne sont pas à craindre. Cela confirme l'existence du type combiné C. Recuit 2 h à 1000° et refroidi 24 h entre 600 et 500°, cet alliage donne un coude à 242°, $\theta_f = 316°$, $\theta_{h^a} = 323°$, $\theta_{h^b} = 446°$ avec $\mathfrak{T}^a = 7°$ et $\mathfrak{T}^b = 130°$. A l'état trempé, le champ coercitif est moindre en général et le coude s'est déplacé vers 275°. $\theta_f = 308°$, $\theta_{h^a} = 313°$, $\theta_{h^b} = 37°$ avec $\mathfrak{T}^a = 5°$ et $\mathfrak{T}^b = 64°$.

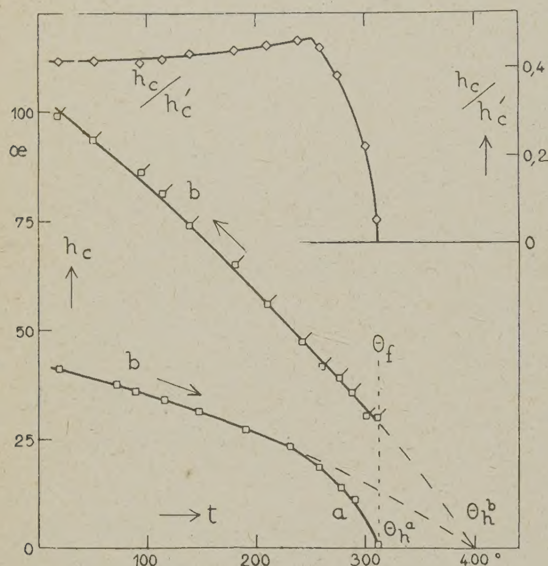


Fig. 18. — Type combiné C dans la pyrrhotine de Norvège.

Le type combiné C étant bien établi expérimentalement, on peut maintenant affirmer l'existence de ce type pour des corps dont la courbe des h_c ne montre pas un coude *c* bien prononcé. Tel est le cas pour la pyrrhotine de Norvège en tige. On voit en effet (*fig.* 18) que la courbe à l'aller montre un changement d'allure à 250° environ, et l'on peut extrapoler la courbe *b* vers $\theta_{h^b} = 400°$, point qu'on obtient aussi par la courbe de retour (type B pur). Le recuit de quelques minutes à quelques degrés au-dessus de θ_f a donc pour effet d'augmenter notablement le champ coercitif d'une manière générale, toutefois en conservant le même θ_h pour le type B et surtout de supprimer la courbe *a* du type A de l'aller. On peut montrer qu'il s'agit d'un changement d'allure dans la courbe de l'aller en portant le rapport $\frac{h_c}{h'_c}$ des champs coercitifs à l'aller et au retour (*fig.* 18 en haut) qui montre nettement un coude à 250° environ.

Le même phénomène se produit dans la magnétite [tiges taillées parallèlement à un axe ternaire, étudiées en 1931 dans [1] (*fig.* 19)]. La variation de h_c, étant rectiligne, entre 130 et 480°, peut s'extrapoler vers $\theta_{h^b} = 738°$, tandis que la partie *a* supérieure à 480° s'extrapole exactement vers le point de Curie ferromagnétique θ_f.

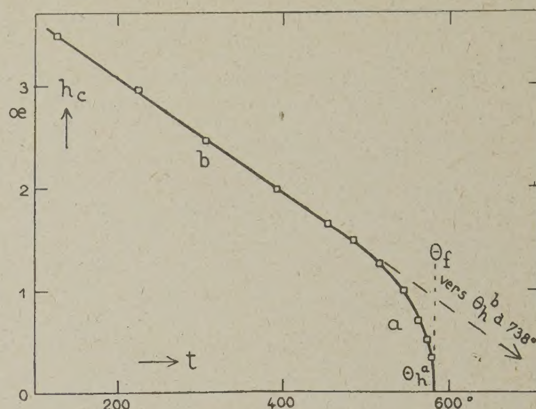


Fig. 19. — Le type C dans la magnétite.

6. Sur les deux mécanismes de renversement. — Il est hors de doute qu'il n'y a aucun changement d'état dans tous les alliages et combinaisons où nous avons trouvé le type C. Il faut donc attribuer les deux portions de courbe *a* et *b* de h_c à *deux mécanismes différents* de renversement. Nous avons déjà mentionné (p. 99) qu'on en admet généralement deux espèces : le renversement par rotation des moments élémentaires contre les forces cristallines et le renversement par déplacement de la paroi de Bloch. Il est assez plausible que les variations thermiques du champ coercitif dû à ces deux espèces de renversement soient différentes. On n'observe alors effectivement que celui qui demande le moindre champ. Ainsi pour le fer où la constante d'anisotropie est très grande, la rotation

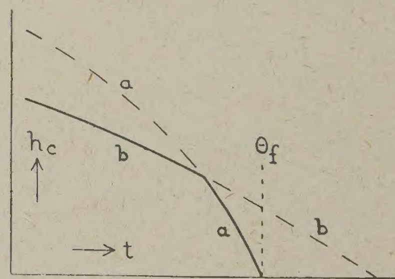


Fig. 20. — h_c observé suit la courbe inférieure.

est difficile, et le champ coercitif dû à la rotation serait de l'ordre de 140 œrsteds. Le petit champ coercitif observé, de l'ordre de l'œrsted, est donc dû au renversement par déplacement de paroi. Si dans un alliage les champs coercitifs dus à ces deux causes deviennent du même ordre de grandeur, les deux variations thermiques *a* et *b* de forme diffé-

rente pourront se croiser et le champ coercitif observable ne suit que la courbe la plus basse (*fig.* 20). Le coude doit toujours être convexe, ce qui a été observé effectivement dans tous les alliages.

Il s'agit encore d'attribuer les courbes *a* et *b* à des mécanismes déterminés. Nous avions trouvé le type A dans le nickel ex-carbonyl.

Or sa constante d'anisotropie, déjà relativement faible à la température ordinaire, décroît très rapidement lorsque la température s'élève, et devient probablement nulle à θ_f [8]. La rotation devient donc très facile vers le point de Curie. Il est donc plausible d'attribuer le type A de la variation thermique de h_c qui devient nul à θ_f *au renversement par rotation* et le type B au renversement par déplacement de paroi. En effet, dans ce dernier mécanisme, la résistance au déplacement est causée par des « accidents », soit des trous, des inclusions, des tensions intérieures irrégulières, etc. Ces accidents gardent leur importance vers les hautes températures. Il est donc plausible que vers θ le champ coercitif dû au déplacement de paroi reste fini. Il faut considérer cette attribution des mécanismes de renversements aux divers types comme provisoire, en attendant des preuves expérimentales plus directes.

Il reste alors la question pourquoi on n'observe pas toujours le type A ou le type combiné C qui contient le type A, c'est-à-dire convergence de h_c vers zéro à θ_f provoqué par la facile rotation. Il se peut qu'une anisotropie non cubique (par tension par exemple) empêche la rotation.

Les observations suivantes donnent encore quelques éclaircissements sur la possibilité d'obtenir le type B avec son h_c^0 fini.

7. Nouveaux exemples du phénomène de dédoublement des θ. — Un tel dédoublement a été observé pour la première fois sur du nickel Mond recuit (*voir* p. 98 et *fig.* 3 et 4). Il n'y a pas de doute que ce phénomène ne peut être provoqué que par la coexistence de deux ferromagnétiques différents. Nous sommes donc en présence d'un alliage hétérogène. Nous allons appeler ce type, type D. Ses deux branches 1 et 2 pourraient appartenir à un des trois types A, B ou C. Mais le plus souvent on observe le type B, celui-ci étant peut-être favorisé par l'hétérogénéité de l'alliage.

Ce type D a été observé de nouveau pour un ferronickel non recuit à 35 pour 100 de Ni (*fig.* 21, courbe 1-2). Par un recuit prolongé (16 h à 900°, suivi d'un refroidissement lent en 24 h), le phénomène a gardé la même importance (*fig.* 21, courbe 3-4), seulement θ_f a augmenté notablement. En reprenant avec plus de précision les expériences pour déterminer mieux la partie 4, on a trouvé même un troisième constituant. Les θ_f des trois constituants sont à peu près 225, 258 et 340°, les h_c sont 0,2, 0,5 et 27 œrsteds, le dernier relativement très grand (*voir* dans la figure 22 la courbe de σ_R et celle de h_c à deux échelles différentes). Les branches ascendantes

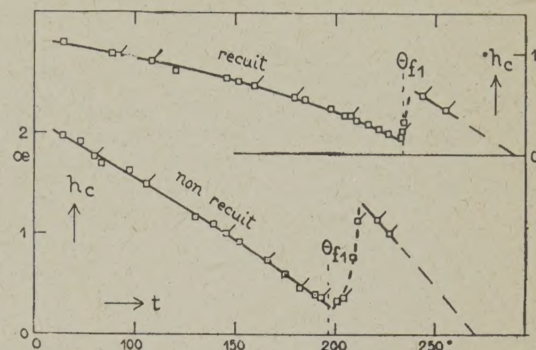


Fig. 21. — Dédoublement des θ dans un ferronickel à 35 pour 100 de Ni, type D.

n'ont pas de signification physique simple. On se rend facilement compte par un graphique que si le ferromagnétique 1 est en voie de disparition, on parcourt la branche ascendante de la courbe d'hystérèse du ferromagnétique 2 jusqu'à ce qu'on atteigne son champ coercitif.

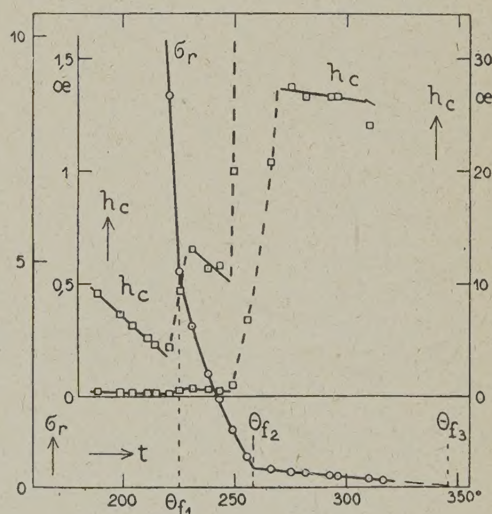


Fig. 22. — σ_R et h_c^0 des trois constituants d'un ferronickel à 35 pour 100 de Ni, recuit.

Il n'y a aucun indice sur la nature du deuxième et du troisième constituant.

D'une manière très accentuée, le type D a paru dans un ferronickel à 60 pour 100 de Ni. Cet alliage non recuit a donné d'abord le type A avec $\theta_h = \theta_f = 560°$ (*fig.* 23, courbe I). Après un recuit (3 h à 1000°, suivi d'un refroidissement relativement rapide dans le four), il montre le type combiné C très marqué

avec $\theta_f = 552°$, $\vartheta^a = 4°$ et $\vartheta^b = 108°$ (courbe II). Après un nouveau recuit (1 h à 1 000°, suivi cette fois d'un refroidissement lent dans la région de 600 à 500°), le type C a disparu et le phénomène du dédoublement est apparu (*fig.* 23, courbe III). Jusqu'à $\theta_f = 567°$, nous avons le type B avec $\theta_{h_1} = 585°$. Après, h_c monte rapidement à une valeur plus grande qu'à la température ordinaire, où il reste pour une dizaine de degrés, pour décroître de nouveau vers un deuxième $\theta_{h_2} = 615°$ environ (¹). Le deuxième alliage semble donc appartenir au type C.

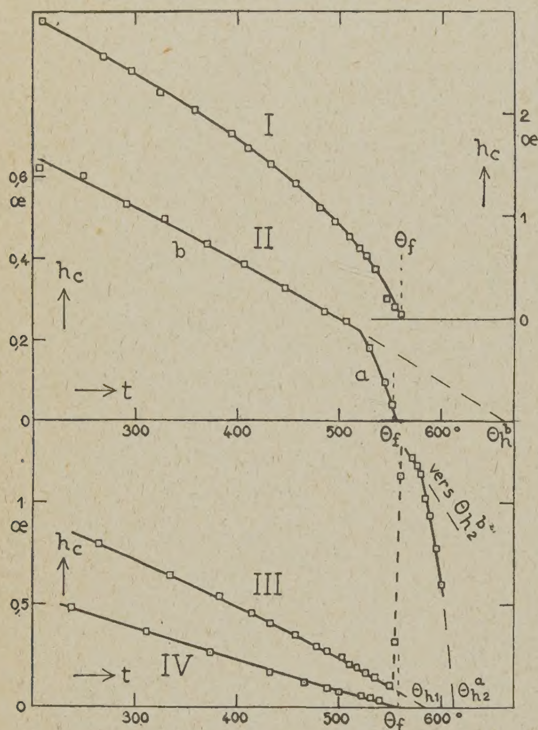


Fig. 23. — Apparition et disparition du dédoublement des θ dans le ferronickel à 60 pour 100 de Ni.

Ici plusieurs indices parlent pour l'hypothèse qu'il s'agit, pour le deuxième ferromagnétique, de $FeNi_3$ en surstructure. D'abord, son point de Curie coïncide avec celui de cet alliage à 618° (*voir* p. 103 et *fig.* 16), ensuite cet alliage (à 76 pour 100 spéc. Ni) est assez voisin de l'alliage à 60 pour 100 de Ni pour qu'une ségrégation soit possible. Si c'est ainsi, on devrait pouvoir faire disparaître l'alliage ségrégé $FeNi_3$ par un recuit à haute température, suivi d'un refroidissement rapide. En effet, après ce traitement la courbe des h_c est devenue tout à fait normale du type A (*fig.* 23, courbe IV).

La méthode du relevé des h_c en fonction de la température permet donc d'affirmer avec sûreté l'*apparition d'un deuxième alliage ferromagnétique par ségrégation.*

8. Alliages a surstructure. — Nous avions attribué (*voir* sous D 6, p. 105) le type B avec son h_c^0 fini au renversement par déplacement de paroi. Mais ces expériences n'avaient pas permis de dire quelles sont les conditions nécessaires pour créer ce type B. Les impuretés lui semblent favorables, créant les accidents. D'après les expériences avec le ferronickel à 60 pour 100 de Ni recuit (*fig.* 23, courbe III), $FeNi_3$ montre un h_c^0 particulièrement grand. On peut être tenté de l'attribuer à l'existence d'une surstructure. Elle favorise en effet la formation d'une structure en mosaïque à l'intérieur de chaque



Fig. 24. — Les limites des phases dans un cristal à surstructure.

cristal individuel. Dans chaque cristal il y a au moment du recuit, c'est-à-dire de la formation de la surstructure, un grand nombre de germes de surstructure dans chaque cristal. En grandissant, ces microcristaux peuvent se rencontrer, mais ne pas être en phase (*fig.* 24). Ces limites de phases ainsi formées peuvent aussi fonctionner comme « accidents » empêchant le déplacement de paroi quoique l'alliage soit présumé pur.

Incités par cette réflexion, nous avons étendu l'expérience à quelques alliages susceptibles de surstructure. Mais $FeNi_3$, recuit 1 h à 1 000° et refroidi lentement pendant 48 h entre 600 et 450°, n'a donné que le type A_1 avec $\vartheta = 9°$. En effet $FeNi_3$ est situé très près du point dans les ferronickels où la courbe de l'anisotropie passe par zéro et où la rotation devient très facile. Cet alliage doit montrer en effet le type A.

Un Fe-Cr à 50 pour 100 de Cr (fondu dans le vide par M. Spielmann) donne, recuit 10 min à 1 000° et trempé à l'air, le type B avec un ϑ relativement faible ($\vartheta = 20°$), $\theta = 330°$ (*fig.* 24, courbe I). Par

(¹) Cet échantillon a été étudié aussi sous diverses tractions. Il est remarquable que, tandis que jusqu'à θ_f h_c diminue notablement, à la moitié environ par une traction de 2,6 kg/mm², en gardant le même type B avec $\theta_h = 586°$, la grandeur de h_c entre θ_f et θ_{h_2} *n'a pas varié*, même sous des tractions plus fortes encore.

recuit à 400° pendant 16 h suivi d'un refroidissement lent, par contre, on obtient le type B plus marqué ($\Im = 52°$) (*fig.* 24, courbe II), dû probablement à une surstructure (θ a augmenté jusqu'à 415°).

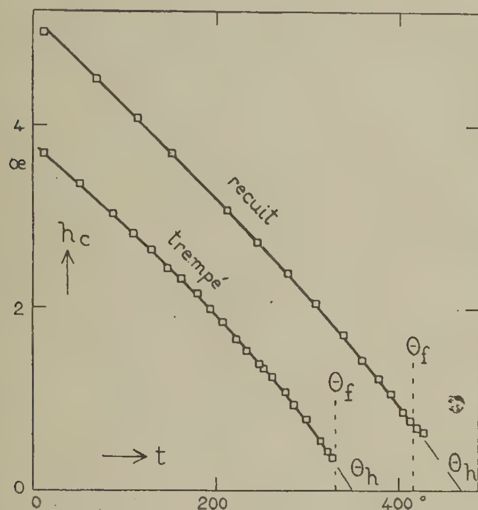


Fig. 25. — Renforcement du type B dans Fe Cr par recuit.

Nous espérions avoir de plus amples renseignements à ce sujet par l'étude de l'alliage $MnNi_3$ qui n'est ferromagnétique qu'à l'état de surstructure. Fondu dans le vide (par M. Guillaud), cet alliage n'était pas ferromagnétique. Par des recuits successifs il a été amené dans différents états (6 h à 460° : 1er état; 40 h à 460° : 2e état et 200 h à 460° : 3e état).

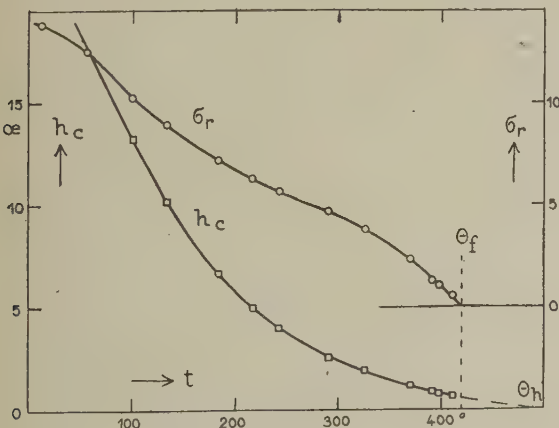


Fig. 26. — Mn Ni_3, état II.

Cet alliage a montré, surtout dans le premier état, une très forte viscosité magnétique, de sorte qu'une détermination précise des grandeurs magnétiques a été impossible. Cette viscosité diminue par des recuits successifs. Nous ne donnerons la variation thermique de h_c, σ_R et σ_{400} (σ dans un champ extérieur de 400 gauss) que pour les états II et III. Dans l'état III ($\theta_f = 420°$) la courbe des h_c, fortement creuse vers l'axe des températures, donne un faible h_c^0 et θ_h à 490° environ, $\Im = 70°$ (*fig.* 26). Par un nouveau recuit de 200 h à 460° ($\theta_f = 475°$), l'allure de la courbe des h_c est devenue tout à fait anormale; h_c diminue d'abord fortement jusqu'à 130° et reste ensuite assez constant en passant par un maximum.

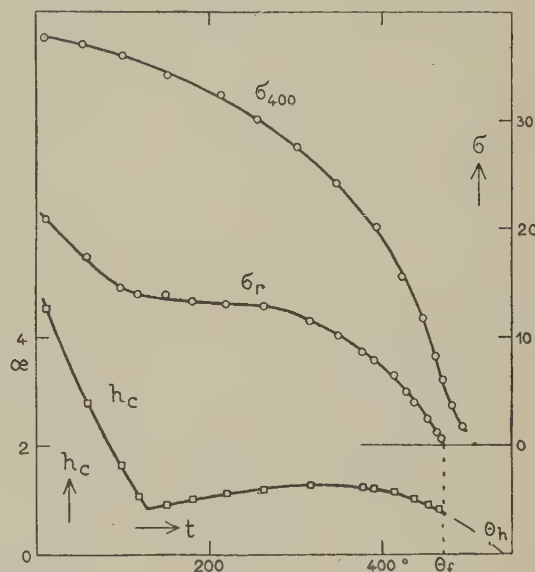


Fig. 27. — Mn Ni_3, état III.

L'extrapolation donne $\theta_h = 540°$ et $\Im = 65°$, du même ordre de grandeur que dans l'état II (*fig.* 27).

Le coude dans les h_c à 130° étant concave, il ne peut s'agir d'un changement de mécanisme dans le renversement. Puisque l'aimantation rémanente décroît rapidement dans la même région de température, sans que l'aimantation dans un champ de 400 gauss montre cette décroissance, l'alliage subit probablement des tensions intérieures qui diminuent vers 130°. Quoi qu'il en soit, l'état de surstructure semble être favorable au type B (grand h_c^0 et grand $\Im$).

E. **Conclusions**. — Au cours de cette étude nous avons pu confirmer l'existence des deux types A et B de la variation thermique du champ coercitif, pour le premier h_c s'annulant à θ_f, pour le second h_c conservant une valeur finie notable. Un troisième type C avec un coude qui combine les types A et B a montré que suivant la région de température deux mécanismes différents de renversement entrent en jeu. Ainsi le type A a pu être attribué au renver-

sement par rotation, tandis que le type B est attribué au renversement par déplacement de paroi.

On a encore rencontré des exemples frappants de dédoublement des points de Curie, preuve expérimentale du fait qu'on peut trouver deux constituants en ségrégation dans des alliages où l'on ne l'aurait pas soupçonné autrement.

Il est assez probable que la constitution en micromosaïque des alliages à surstructure favorise le type B.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] R. FORRER, *J. de Physique*, 1930, série VII, t. **2**, p. 49.
[2] R. FORRER, *J. de Physique*, 1931, série VII, t. **2**, p. 312.
[3] KOPP, *Thèse*, Zurich, 1919.
[4] R. FORRER et A. HOFFMANN, *C. R. Acad. Sc.*, 1930, t. **191**, p. 1046.
[5] R. FORRER, *Cahiers de Physique*, 1943, cahier n° **15**, p. 57.
[6] R. FORRER, *Cahiers de Physique*, 1942, série II, cahier n° **12**, p. 57.
[7] W. GERLACH, *Z. Metallkde*, 1937, t. **29**, p. 124.
[8] H. POLLEY, *Ann. der Phys.*, 1939, t. **36**, p. 625.

PROBABILITES MATHÉMATIQUES ET PROBABILITES PHYSIQUES. APPLICATIONS

Par G. et J.-A. REBOUL.
Faculté des Sciences et de Médecine de Montpellier.

Sommaire. — Les auteurs montrent l'avantage qu'il y aurait à compléter la notion de probabilité mathématique qui comporte une idée de probabilité d'atteinte, par celle de probabilité physique à laquelle s'attache une idée de probabilité d'action.

Ils indiquent la relation générale qui existe entre ces deux sortes de probabilités et en font l'application à quelques phénomènes physiques : équilibre des fluides, changements d'état, etc.

Ils terminent en signalant que la relation qu'ils utilisent n'est qu'un cas particulier d'un principe très général qui intéresse toutes les sciences physiques, chimiques ou biologiques.

I.

Probabilités physiques.

1. **Constitution d'un système.** — Quand on veut étudier un phénomène, on commence par s'en faire une représentation mécanique sur laquelle on peut ensuite plus facilement raisonner.

La plupart du temps on se represente le système phénoménal étudié comme formé par une collectivité de personnages réels ou hypothetiques : points géométriques ou matériels, atomes, molécules, électrons, magnétons, ..., cellules, êtres organisés, etc. Parfois aussi ces personnages ne sont que des entités : grains d'énergie ou de lumière, photons, radiations.....

La réalité ou la constitution intime de ces individus supposés importe peu. Ils servent simplement de substratum à un certain nombre de qualités physiques que l'on veut discuter. C'est sur eux qu'on répartit la valeur ou *actif* des facteurs physiques intervenant dans le phénomène à étudier : masse, énergie, longueur, etc. Cette répartition se fait suivant une loi dont la forme la plus simple est l'équipartition et la forme la plus générale une loi de hasard quelconque.

Nous admettrons en outre que les divers agents physiques opérant peuvent toujours être *quantifiés*, c'est-à-dire que, comme pour la matière ou l'énergie, leur actif peut être considéré comme formé d'un nombre entier d'une même quantité (un quantum) de l'actif du facteur intéressé. Ainsi donc les individus qui leur servent de support possèdent un nombre entier de ces quanta, et les modifications ou les échanges qui les touchent, font intervenir des nombres entiers de ces mêmes quantités élémentaires.

La représentation mécanique étant ainsi faite, le problème posé se ramène toujours à l'étude de ses conditions d'équilibre ou d'évolution et peut souvent se résoudre en appliquant les règles du calcul des probabilités.

2. **Probabilités mathématiques et probabilités physiques.** — On définit la *probabilité mathématique* d'un événement comme étant le rapport qui existe entre le nombre de cas favorables à l'événement et celui de tous les cas possibles. Par exemple, dans une loterie comprenant N participants, identiques au point de vue du tirage, et dN lots, la proba-

bilité de gain de chacun des participants est $\frac{dN}{N}$

Cette définition suppose que l'on a la possibilité de dénombrer les individus que touche ou qu'aurait pu toucher l'événement. Elle comporte une idée de *probabilité d'atteinte*.

En Physique ou en Biologie, il est rarement possible de dénombrer directement les individus (souvent hypothétiques) intéressés par l'action d'un facteur physique ou par ses variations. Mais on peut, la plupart du temps, déterminer quantitativement cette action en évaluant les actifs ou les variations d'actif des facteurs physiques intervenant.

Si l'on produit une variation dU de l'actif U d'un certain facteur réparti sur les N individus constituant le système, cette variation touchera dN d'entre eux. La probabilité mathématique pour que l'un des individus soit atteint par la variation dU est le rapport $\frac{dN}{N}$ qu'il est impossible de déterminer directement et qui d'ailleurs intéresse peu le physicien. La chose essentielle pour ce dernier, c'est la variation $\frac{dU}{U}$ qui mesure l'action relative du facteur. C'est ce rapport $\frac{dU}{U}$ entre la variation de l'actif du facteur et la valeur qu'avait cet actif au moment où s'est produite cette variation, qui constitue la *probabilité physique* du phénomène. On voit que cette définition comporte une idée de *probabilité d'action*. Un exemple fera saisir l'intérêt de cette dernière notion.

Soit une collectivité de $N = 1000$ individus possédant un capital $U = 100\,000$ fr. Supposons que cet actif, réparti entre les individus soit compté en billets de 100 fr. sans aucune monnaie divisionnaire. Les individus ne peuvent posséder ou échanger qu'un nombre entier de ces billets qui sont, en somme, les quanta de l'opération.

a. Admettons d'abord que l'actif soit également réparti entre les membres de la collectivité, chacun d'eux possède 100 fr (1 quantum). On veut prélever sur la collectivité une contribution $dU = 1000$ fr (10 quanta). Comme il n'y a pas de monnaie divisionnaire, on tirera au sort le nom des 10 individus qui devront céder leur quantum. On aura donc $dN = 10$ payants sur les $N = 1000$ individus. La probabilité mathématique pour que l'un quelconque de ces derniers soit atteint par le sort est $\frac{dN}{N} = \frac{1}{100}$.

On peut raisonner autrement et n'envisager que l'action à effectuer : prélèvement d'une somme $dU = 1000$ sur l'actif $U = 100\,000$ (10 quanta à prendre sur 1000). La probabilité pour que l'un de ces quanta anonymes soit versé comme contribution est $\frac{dU}{U} = \frac{1}{100}$. Ce rapport a même valeur que plus haut, mais il comporte une idée de probabilité d'action, l'action effectuée étant ici le versement de la contribution.

Dans ce cas (équipartition) probabilité mathématique $\frac{dN}{N}$ et probabilité physique $\frac{dU}{U}$ sont les mêmes.

b. Supposons maintenant que l'actif U soit reparti au hasard entre les N individus, n_0 d'entre eux ne possèdent rien, n_1 ont un quantum, n_2 deux,... et ainsi de suite, le total des quanta possédés par les 1000 individus restant égal à 1000.

Si, comme tout à l'heure, on veut prélever une contribution $dU = 1000$ fr sur le capital $U = 100\,000$ de la collectivité, on tirera encore au sort, mais la probabilité d'atteinte $\frac{dN}{N}$ de l'un quelconque des individus n'est plus égale à $\frac{dU}{U}$. Il se peut en effet que le sort désigne l'un des individus qui ne possèdent rien; il faudra donc tirer à nouveau au sort pour le remplacer et l'on aura $\frac{dN}{N} > \frac{dU}{U}$. Il se peut aussi que le sort atteigne plusieurs fois un même individu possédant plusieurs quanta et alors $\frac{dN}{N} < \frac{dU}{U}$.

On voit que, si la probabilité physique $\frac{dU}{U}$ est bien déterminée et toujours égale à $\frac{1}{100}$, il n'en est pas de même de la probabilité mathématique $\frac{dN}{N}$. Cette dernière dépend essentiellement de la loi de répartition de l'actif du facteur entre les individus de la collectivité, tandis que la première en est indépendante.

3. Signe d'une probabilité physique. — La probabilité mathématique $\frac{dN}{N}$, étant un rapport, est toujours affectée du signe +. Dans la probabilité physique $\frac{dU}{U}$, la variation dU peut se produire, comme l'action, dans un sens donné ou en sens contraire. Si l'action est telle que l'actif augmente, dU est positif, il est au contraire négatif pour une diminution. Comme U est toujours > 0, la probabilité $\frac{dU}{U}$ aura donc une valeur positive ou négative; la première correspondant à une action telle qu'il y a gain d'actif pour la collectivité, la deuxième à une perte.

En outre on est parfois amené à expliciter certains signes dans l'expression des probabilités physiques. Supposons, par exemple, que le nombre N des individus du système et l'actif U du facteur agissant

soient en corrélation directe : à une augmentation dU correspond un accroissement de dN. S'il y a équipartition entre N et U, on aura, comme tout à l'heure,

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = \frac{\mathrm{d}U}{U}.$$

Si au contraire la corrélation est inverse, à d$N > 0$ correspond d$U < 0$, et il faut écrire

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = -\frac{\mathrm{d}U}{U}.$$

4. **Coefficients de correction des probabilités.** — Désignons par ε la valeur d'un quantum fictif correspondant à une égale répartition du capital U entre les N membres de la collectivité, $\varepsilon = \frac{U}{N}$ et soit ε' celle du quantum fictif que les dN individus atteints par le sort auraient versé si la contribution dU était également répartie entre eux,

$$\varepsilon' = \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}N}.$$

Il s'ensuit que

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}\frac{\mathrm{d}U}{U} = \beta\frac{\mathrm{d}U}{U}.$$

La probabilité d'atteinte $\frac{dN}{N}$ est liée à la probabilité d'action par la relation

$$\frac{\mathrm{d}N}{N} = \beta\frac{\mathrm{d}U}{U}.$$

$\beta = \frac{\varepsilon}{\varepsilon'}$ est un coefficient de correction par lequel il faut multiplier la probabilité physique pour qu'elle soit égale à la probabilité mathématique; il s'exprime en fonction des conditions du problème.

Ce *coefficient de correction des probabilités* β jouit de propriétés particulières qui lui font jouer un rôle essentiel dans les applications où l'on fait intervenir les probabilités physiques. Pour ne pas trop allonger cet article, nous indiquerons simplement ces propriétés sans tenter, pour le moment, de les établir. Dans le cas où il y a équipartition, nous avons vu que β est égal à l'unité.

On prend β avec le signe + quand la corrélation entre N et U est directe et avec le signe — quand elle est inverse : il faut donc commencer par examiner le sens de cette corrélation avant de poser l'équation du problème.

Si le facteur opérant présente n degrés de liberté, $\beta = n$. Si, au contraire, il présente p liaisons $\beta = \frac{1}{p}$.

La probabilité physique $\frac{dU}{U}$ d'une opération n'est pas autre chose que l'espérance mathématique d'une partie d'un jeu de hasard engagée entre les N individus du système et dont l'enjeu serait $\frac{1}{\beta}$.

L'introduction des coefficients de correction des probabilités β n'est qu'une généralisation de la notion de potentiel chimique de Gibbs ou de celle des « scaping tendency » de Lewis.

Le coefficient β est en général une fonction des diverses variables intervenant dans le problème. Sa détermination est facile si l'on connaît les relations que donne l'expérience entre les actifs des divers facteurs.

Pour l'établissement et le développement de ces divers points, nous renverrons le lecteur à la brochure que nous avons publiée sur ce sujet [1] ou à des Mémoires ultérieurs.

II.

Relation de probabilités.

1. **Changement d'équilibre ou évolution d'un système.** — Supposons faite la représentation mécanique du système avec sa collectivité de personnages, réels ou hypothétiques, sur lesquels sont répartis les actifs quantifiés des divers facteurs physiques intervenant dans le phénomène.

On peut considérer qu'une évolution donnée ou un changement fini, virtuel ou réel, de l'équilibre du système est la somme d'une infinité de changements élémentaires. Ces derniers intéressent la collectivité, c'est-à-dire un très grand nombre d'individus, mais comme ils sont aussi petits qu'on peut le désirer, ils ne mettent en jeu que de très faibles variations d'actifs des facteurs opérants, par conséquent un très petit nombre de quanta.

Comment répartir ces quelques quanta correspondant aux changements élémentaires entre les nombreux individus du système, si ce n'est par une loi de probabilité.

En somme l'établissement de la loi d'évolution d'un phénomène procède toujours de la même méthode : le système étudié étant assimilé à une collectivité d'individus en équilibre, on modifie cet équilibre de manière infiniment petite et l'on écrit que les changements se produisent suivant une loi de hasard.

En d'autres termes, un changement élémentaire, virtuel ou réel, de l'équilibre d'un système ressemble au tirage d'une loterie, et la nouvelle répartition des actifs des divers facteurs se fait entre les individus de la collectivité de la même manière que la répartition des lots de cette loterie.

2. Relation de probabilité; cas de l'équipartition. — Soit une loterie comprenant dN lots et N participants; la probabilité pour que l'un de ces derniers gagne un lot est $\frac{dN}{N}$, supposons que ces lots soient formés d'objets hétéroclites : dN_1 objets de l'espèce u et de valeur dU, dN_2 objets de l'espèce v et de valeur dV, etc.

La probabilité pour qu'un participant gagne un lot de la catégorie u est $\frac{dN_1}{N}$, pour qu'il gagne un lot de la catégorie v, $\frac{dN_2}{N}$, et ainsi de suite.

Le nombre total des lots étant $dN = dN_1 + dN_2 + \ldots$, la probabilité pour qu'un participant gagne un lot sera :

$$\frac{dN}{N} = \frac{dN_1}{N} + \frac{dN_2}{N} + \ldots,$$

si les N participants à la loterie possédaient avant le tirage un certain nombre d'objets des diverses catégories en quantités U, V, ..., suffisantes pour que l'on puisse les considérer comme également répartis entre les N individus. Les quanta de répartition étant respectivement ε_1, ε_2, ..., on a :

$$U = N\varepsilon_1, \qquad V = N\varepsilon_2, \qquad \ldots.$$

D'autre part, si nous admettons qu'après le tirage l'équipartition n'a pas été sensiblement modifiée et que les quanta n'en sont pas changés, on a encore

$$U + dU = (N + dN_1)\varepsilon_1,$$
$$V + dV = (N + dN_2)\varepsilon_2, \qquad \ldots,$$

et par suite

$$dU = dN_1\varepsilon_1, \qquad dV = dN_2\varepsilon_2, \qquad \ldots.$$

L'équation (1) peut donc s'écrire

$$\frac{dN}{N} = \frac{dU}{U} + \frac{dV}{V} + \ldots = \sum \frac{dU}{U},$$

qui exprime la relation existant entre les probabilités dans le cas de l'équipartition.

S'il s'agit d'un système complètement isolé, comme le serait un cercle fermé de joueurs ($dN = 0$), le gain des uns est compensé par la perte des autres et la relation devient

$$\sum \frac{dU}{U} = 0.$$

3. Relation de probabilité; cas général. — il faut, dans ce cas, faire intervenir des probabilités corrigées, comme s'il s'agissait d'une loterie dont les conventions seraient complexes ou dans laquelle le mécanisme de répartition serait faussé. Par exemple une loterie dans laquelle tous les participants n'auraient pas un même nombre de billets ou dont l'organisateur retiendrait pour sa peine une partie des lots qui devraient normalement revenir aux gagnants.

Ces derniers sont toujours au nombre de dN_1 pour les objets de l'espèce u, de dN_2 pour ceux de l'espèce v, etc., mais il n'y a plus proportionnalité entre dN_1 et dU, dN_2 et dV, ni entre N et U, V, et l'on a des relations complexes

$$dN_1 = \beta'_1\, dU, \qquad dN_2 = \beta'_2\, dV, \qquad \ldots$$

et

$$N = \beta''_1 U, \qquad N_2 = \beta''_2 V, \qquad \ldots.$$

Les coefficients β'_1, β''_1, ... dépendant essentiellement des conventions adoptées pour le fonctionnement de la loterie.

Il s'ensuit que si le nombre des gagnants est toujours dN tel que

$$\frac{dN}{N} = \sum \frac{dN_1}{N},$$

il faut, dans cette dernière formule, remplacer

$$\frac{dN_1}{N}, \quad \frac{dN_2}{N} \qquad \text{par} \qquad \beta_1 \frac{dU}{U}, \quad \beta_2 \frac{dV}{V},$$

et l'on aura la relation de probabilité

$$\frac{dN}{N} = \sum \beta \frac{dU}{U}.$$

Ici encore, quand le système est complètement isolé ($dN = 0$), on aura :

$$\sum \beta \frac{dU}{U} = 0.$$

4. Applications des relations de probabilités. — *a.* Pour les applications on utilisera l'énoncé suivant qui rappelle celui d'un principe bien connu de la Mécanique :

« *Pour trouver les conditions d'équilibre ou d'évolution d'un système, on imprime aux facteurs opérant, supposés indépendants, des variations élémentaires, virtuelles ou réelles, compatibles avec les liaisons. On écrit que la somme des probabilités correspondantes est nulle.* »

Cette application donnera, suivant les cas, des relations de la forme

$$\frac{dN}{N} = \sum \beta \frac{dU}{U} \qquad \text{ou} \qquad \sum \beta \frac{dU}{U} = 0$$

L'intégration plus ou moins compliquée de ces équations donne la loi du phénomène, exprimée par une *équation d'état*. Cette dernière lie le nombre des individus de la population aux actifs des divers facteurs intervenant; elle sera en général de la forme

$$N = N_0\, e^{\int_0^{U,V\ldots} \Sigma \beta \frac{dU}{U}}$$

avec $\beta = 1$ dans le cas de l'équipartition.

b. Supposons qu'il s'agisse d'un *fluide parfait.* Nous le représentons comme un groupement de N individus complètement indépendants les uns des autres et soumis aux seuls facteurs température, pression et volume d'actifs T, p et v, également répartis entre les individus puisque ces derniers sont identiques.

Des variations élémentaires dT, dp et dv de ces actifs touchent un nombre dN d'individus tel que

$$\frac{dN}{N} = \frac{dp}{p} + \frac{dv}{v} - \frac{dT}{T}$$

Le signe — devant le terme température signifie que N et T sont en corrélation inverse, tandis que la corrélation est directe entre N et p ou v.

L'intégration de la relation précédente donne l'équation d'état bien connue

$$pv = kNT = RT.$$

La constante R, généralement utilisée, dépend seulement des unités employées et du nombre N des individus de la collectivité envisagée.

La nature des individus imaginés importe peu. S'il s'agit de molécules gazeuses, on a la loi de Mariotte. S'il s'agit de molécules en solution étendue dans un liquide, on a le cas de la pression osmotique et de la loi de Van't Hoff. Enfin a-t-on à faire à des électrons libres dans un métal, on aura encore la même équation. La valeur de R qui ne dépend que des unités employées et du nombre des individus pourra être la même dans les trois cas et se présenter comme une constante universelle.

c. Si les individus de la population ne sont plus indépendants ou identiques, comme c'est le cas des molécules d'un gaz à basse température, à pression élevée, ou dans le voisinage du point de liquéfaction, il n'y a plus possibilité d'équipartition et il faut faire intervenir des probabilités corrigées.

La relation s'écrit alors

$$\frac{dN}{N} = \beta_1 \frac{dp}{p} + \beta_2 \frac{dv}{v} + \beta_3 \frac{dT}{T}.$$

Les coefficients β_1, β_2, β_3 sont des fonctions de p, v ou T qu'il n'est possible de calculer que si l'on précise les conditions particulières du système.

Dans le cas de conditions repondant à l'equation donnée par Van der Waals

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - \varphi) = RT,$$

les coefficients β auront les valeurs

$$\beta_1 = \frac{p}{\varpi}, \qquad \beta_2 = \frac{v}{v - \varphi} - \frac{2a}{\varpi v^2}, \qquad \beta_2 = -1$$

avec

$$\varpi = p + \frac{a}{v^2}.$$

III.

Exemples d'application à la Physique.

1. **Formule de Boltzmann généralisée.** — Soit un système représenté par une collectivité de N individus, sur la nature desquels nous ne faisons pour le moment aucune hypothèse particulière, et qui sont porteurs d'une énergie dont la valeur d'ensemble est W.

Supposons que ce système échange avec l'extérieur une énergie dW sous une forme quelconque. Nous admettons que cet échange ne peut se faire que par nombre entier de quanta. Dans ces conditions le changement correspondant à dW touche un nombre dN d'individus dont l'énergie se trouve modifiée.

La probabilité $\frac{dN}{N}$ pour que l'un des porteurs de la collectivité soit intéressé par l'opération correspondant à l'échange d'énergie dW doit être telle que

$$\frac{dN}{N} = \beta \frac{dW}{W}.$$

Le coefficient β étant une constante ou une fonction plus ou moins compliquée de W ou d'autres variables.

L'intégration de la relation précédente donne la formule de Boltzmann généralisée

$$N = N_0 \, e^{\int_0^{w} \beta \frac{dw}{w}}$$

qui relie le nombre N de porteurs intéressés à la variation d'énergie W correspondante.

2. **Formule restreinte de Boltzmann.** — Supposons que les porteurs d'énergie envisagés soient les molécules d'un gaz parfait, ou, d'une manière plus générale, les éléments constitutifs d'un fluide, imaginaire ou non, ayant les mêmes caractères de perfection que ce gaz.

A une température T, l'énergie du fluide a pour valeur RT et peut être considérée comme également répartie entre les porteurs, de sorte que l'on peut écrire pour une variation dW de l'énergie

$$\frac{dN}{N} = -\frac{dw}{RT}. \qquad (1)$$

Le signe — signifie que la corrélation est inverse entre N et T et $\beta = 1$ parce qu'il y a possibilité d'équipartition.

Si l'énergie se présentait sous une forme quelconque et avait une valeur W pour l'ensemble des porteurs, la même variation d'énergie dW que plus haut intéresserait un même nombre dN des N molécules de la collectivité, et l'on devrait avoir

$$\frac{dN}{N} = \beta \frac{dw}{W}. \qquad (2)$$

L'égalité des relations (1) et (2) donne pour le coefficient de correction β

$$\beta = -\frac{W}{RT}.$$

La relation généralisée donnée plus haut entre le nombre de porteurs et l'énergie qu'ils ont échangée prend alors la forme que lui a donnée Boltzmann

$$N = N_0\, e^{-\int_0^W \frac{dW}{RT}}$$

b. CAS PARTICULIERS. — Si le phénomène étudié se passe à température constante T (fusion, vaporisation, etc.), la formule s'écrira

$$N = N_0\, e^{-\frac{W}{RT}},$$

W étant l'énergie intéressant la transformation d'un nombre N de porteurs.

Si, à la température T, la variation d'énergie dW se présente sous forme cinétique $d\left(\frac{1}{2} mu^2\right)$, on aura

$$N = N_0\, e^{-\frac{mu^2}{2RT}},$$

d'où l'on tire la formule de Maxwell donnant le nombre dN des molécules dont la vitesse d'agitation est comprise entre u et $u + du$

$$dN = -A\, e^{-\frac{mu^2}{2RT}} u\, du.$$

Si, au contraire, à cette même température T, l'énergie ou sa variation se présente sous forme potentielle W, on aura

$$N = N_0\, e^{-\frac{W}{RT}},$$

d'où l'on tire le nombre dN de molécules correspondant à une variation dW de l'énergie potentielle

$$dN = -B\, e^{-\frac{W}{RT}} dW.$$

De ces diverses formules découlent les lois d'un grand nombre de phénomènes. Nous en donnerons quelques exemples.

3. Équilibre d'un fluide pesant. — Supposons d'abord qu'il s'agisse d'une colonne de gaz parfait de section unité et de hauteur z. L'énergie W de la formule de Boltzmann se présente alors sous forme potentielle. Pour une masse m de gaz placée à l'altitude z, elle est $W = mgz$.

La formule, qui donne, à cette altitude, la variation dN du nombre de molécules correspondant à une variation dz de la hauteur de la colonne s'écrit :

$$dN = -B\, e^{-\frac{gz}{RT}} dz,$$

la constante R correspondant à une masse unité.

Il s'ensuit que la variation de pression dH correspondant à une variation de hauteur dz sera

$$dH = -A\, e^{-\frac{gz}{RT}} dz$$

et que la pression H sera liée à l'altitude z par une expression de la forme

$$H = H_0\, e^{-\frac{gz}{RT}},$$

formule du nivellement barométrique.

b. Supposons maintenant qu'il s'agisse d'un fluide homogène contenu dans un vase et d'une hauteur z. On veut trouver la pression exercée sur le fond.

Le fluide étant homogène, le nombre dN de molécules qui correspond à une variation dz de l'altitude ou à une variation dp de la pression, est indépendant de l'altitude z à laquelle on produit cette variation. Il s'ensuit que

$$dN = A\, dz = B\, dp \quad \text{ou} \quad dp = K\, dz,$$

formule qui contient le principe général de l'hydrostatique.

4. Changements d'état. Formule de Clapeyron. Cas général. — Ce paragraphe intéresse les phénomènes de liquéfaction, vaporisation, sublimation, fusion, dissolution, etc., et d'une manière générale tous les phénomènes où interviennent deux phases coexistant en équilibre et un constituant pouvant passer de l'une des phases dans l'autre.

Ce passage se fait avec transport d'une énergie que l'on appelle souvent chaleur latente de transformation et que l'on désigne par L (calories) quand la masse transformée est égale à 1.

On se trouve ici dans le cas de porteurs d'énergie procédant à des échanges, et la formule généralisée de Boltzmann s'applique. Pour la transformation d'une masse m de matière passant d'un état initial (1) à un état final (2), cette formule s'écrit

$$N = N_0\, e^{\int_1^2 \frac{dW}{mW}}$$

N étant le nombre de molécules ou d'individus qui changent d'état et W l'actif énergétique relatif à l'unité de masse.

Si L est la chaleur de transformation et E l'équivalent mécanique, la variation d'énergie dW mise en jeu pour transformer une masse dm de substance a pour valeur EL dm, et la formule s'écrit

$$N = N_0\, e^{\int_1^2 \frac{EL\, dm}{mW}}$$

Pour expliciter les variables en fonction de T, prenons comme état initial une masse m de matière dans la phase 1 à l'*état zéro* (o absolu) où son énergie est nulle, et comme état final cette même masse m dans la phase 2 à la température T où son actif énergétique est $m\,W$.

Nous pouvons passer de l'état initial à l'état final de deux manières :

a. En portant la masse m prise dans la phase 1 de la température zéro à la température T de l'équilibre, et en la faisant ensuite passer dans la phase 2 à cette même température. Cela nécessite une énergie

$$m W = m \int_0^T \gamma_1 \,\mathrm{d}T + \int_0^m EL \,\mathrm{d}m.$$

γ_1, chaleur spécifique de la substance dans la phase 1.

b. En prenant la masse m de matière dans la phase 2 à la température zéro, où son énergie est toujours nulle et en la portant à la température T. Cela nécessite une énergie

$$m W = m \int_0^T \gamma_2 \,\mathrm{d}T$$

qui doit être la même que la précédente, γ_2 étant la chaleur spécifique de la substance dans la phase 2.

Ces deux expressions de l'énergie étant les mêmes, on en tire

$$\int_0^m EL \,\mathrm{d}m = m \int_0^T (\gamma_2 - \gamma_1) \,\mathrm{d}T.$$

Admettons que L est indépendant de m et que $(\gamma_2 - \gamma_1)$ est une fonction de T variant assez peu, entre zéro et T, pour qu'on puisse la considérer comme constante. Ces hypothèses sont justifiées par le fait que les formules que l'on en déduit sont celles de Clapeyron. Elles sont donc légitimes, du moins dans les conditions où les formules de Clapeyron sont valables. On en tire

$$L \,\mathrm{d}m = m(\gamma_2 - \gamma_1) \,\mathrm{d}T \quad \text{et} \quad \gamma_2 - \gamma_1 = \frac{EL}{T}.$$

En tenant compte de ces relations on pourra écrire la formule vue plus haut

$$N = N_0\, e^{\int_0^T \frac{(\gamma_2-\gamma_1)\,\mathrm{d}T}{W}} = N_0\, e^{\int_0^T \frac{EL}{T}\frac{\mathrm{d}T}{W}},$$

d'où l'on déduit la formule générale liant la température et la pression d'équilibre

$$p = p_0\, e^{\int_0^T \frac{EL}{T}\frac{\mathrm{d}T}{W}}$$

Cette formule s'appliquera dans le cas général où l'on ne peut assimiler la substance à un fluide parfait et utiliser la formule de Boltzmann sous sa forme restreinte. Ce sera notamment le cas des phénomènes de fusion et de solidification.

Si l'on désigne par u' et u les volumes spécifiques de la substance dans les phases (1) et (2), l'énergie W peut prendre la forme $W = p\,(u' - u)$ et la formule s'écrire

$$p = p_0\, e^{\int_0^T \frac{EL}{T}\frac{\mathrm{d}T}{p(u'-u)}},$$

dans laquelle $p\,(u' - u)$ est une fonction plus ou moins compliquée de T.

On tire de cette équation

$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = \frac{EL}{T}\,\frac{\mathrm{d}T}{p(u'-u)},$$

d'où la formule de Clapeyron

$$L = \frac{T}{E}(u'-u)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}T}.$$

5. **Cas particuliers : vaporisation et sublimation.** — Si nous admettons que la vapeur, qui constitue l'une des phases, peut être assimilée à un gaz parfait, on peut appliquer la formule de Boltzmann sous sa forme restreinte. La transformation étant supposée s'opérer en vase clos, la pression correspondant à l'équilibre aura pour expression

$$p = p_0\, e^{+\int_0^T \frac{EL}{T}\frac{\mathrm{d}T}{RT}}.$$

a. Quand la chaleur latente de transformation L est indépendante de la température, la pression et la température sont liées par l'équation

$$p = p_0\, e^{-\frac{EL}{RT}} = p_0\, e^{-\frac{b}{T}} \quad \text{avec} \quad b = \frac{EL}{RT}.$$

A titre de vérification on prendra, par exemple, le cas du mercure. Les valeurs de la tension maxima données par les tables [2] dans les intervalles de température 0 — 360° C et 400-800° C, satisfont la formule précédente avec $b = 7.10^3$ pour le premier intervalle de température et $b = 7{,}1.10^3$ pour le deuxième. On en déduit pour la chaleur latente $L = 70$ avec une incertitude relative de $1/10^e$.

Les valeurs que l'expérience a données pour la sublimation de la glace [2] vérifient également cette formule de manière satisfaisante et donnent pour L une valeur voisine de 672.

b. Si L est fonction de la température, la formule sera naturellement changée.

Dans le cas de la vaporisation de l'eau, par exemple, $L = AT + B$, et la formule devient

$$p = p_0\, T^a\, e^{-\frac{b}{T}}$$

en posant

$$a = \frac{EA}{R} \quad \text{et} \quad b = \frac{EB}{R}.$$

Pour l'eau, l'expérience donne [2], par exemple, entre 120 et 180° C

$$L = 807{,}47 - 0{,}718T.$$

On en tire

$$a = -6{,}46 \quad \text{et} \quad b = 7267.$$

D'autre part, les tables [2] donnent comme tension de vapeur entre 100 et 200° C :

T.	p (cm).	$\log p$.	$\log T$.	$\frac{1}{T}$.
373.....	76	1,881	2,572	268.10^{-5}
423.....	356,87	2,552	2,626	237 »
473.....	1164,7	3,066	2,674	212 »

Du calcul des constantes a et b, à partir de ces résultats et en appliquant la formule donnée plus haut, on tire $a = -6{,}32$ et $b = 7417$.

La concordance est satisfaisante, étant donnée l'hypothèse faite qui assimile la vapeur d'eau à un gaz parfait.

6. **Phénomènes de dissolution.** — *a.* Nous avons encore ici affaire à des molécules passant d'une forme (solide) à une autre (liquide) avec mise en jeu d'énergie (chaleur de dissolution). Soit p la pression osmotique des molécules dissoutes et v le volume de la solution. Si l'on admet que la loi de Van't Hoff leur est applicable ($pv = RT$), les formules restreintes précédentes seront encore valables.

Il s'ensuit que le coefficient de solubilité σ (quantité de sel dissoute dans 100 g de dissolvant) sera lié à la température par une relation de la forme

$$\sigma = A\, e^{-\frac{b}{T}},$$

si l'on suppose que la chaleur de dissolution L est indépendante de la température et en posant $b = \frac{EL}{R}$.

Si la chaleur de dissolution dépend de la température, la formule sera plus compliquée. Dans le cas où $L = AT + B$, elle devient

$$\sigma = AT^a\, e^{-\frac{b}{T}}$$

avec

$$a = \frac{EA}{R} \quad \text{et} \quad b = \frac{EB}{R}.$$

Ces formules sont naturellement soumises aux restrictions suivantes : la loi de Van't Hoff doit s'appliquer, les solutions ne doivent pas être électrolysables et l'on doit être suffisamment éloigné du point d'eutexie.

Si ces conditions ne sont pas remplies, la formule reste la relation générale des changements d'état

$$\sigma = A\, e^{\int_0^T \frac{EL}{T} \frac{dT}{p(u'-u)}},$$

b. Exemples d'application.

Prenons les résultats indiqués dans les tables [2] pour des solutions de NO^3K, K Cl ou Na Cl.

T.	σ.	$\log \sigma$.	$\frac{1}{T}$.
NO_3K :			
398	494	2,69373	$251{,}2.10^{-5}$
373	246	2,39094	268,1 »
323	85,5	1,93197	309,6 »
273	13,27	1,12287	366,3 »
E 270,1	12,2	1,08636	369,7 »
271,5	5,07	0,70501	368,3 »
K Cl :			
453	78	1,89209	$220{,}7.10^{-5}$
373	56,6	1,75282	268,1 »
313	40,1	1,60354	319,4 »
273	28,5	1,45484	366,3 »

Ces résultats sont représentés en coordonnées semi-logarithmiques par les droites de la figure 1.

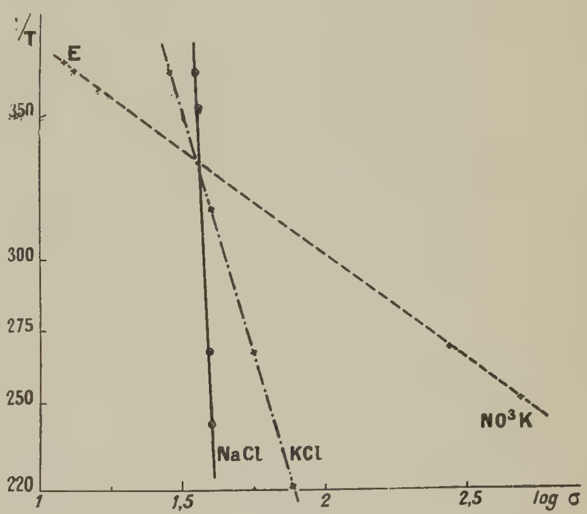


Fig. 1.

Ils correspondent bien à une équation de la première forme, sauf pour les points au delà de l'eutexie E.

On déduit de ces graphiques les valeurs de b et par suite celles de L. Pour NO^3K, on obtient $L = -6{,}2.10^3$ et pour K Cl $L = -1{,}5.10^3$ alors que les tables donnent respectivement $-8{,}3.10^3$ et $4{,}4.10^3$. Si l'on tient compte du fait que les solutions sont électrolysables et que les valeurs

théoriques précédentes doivent être corrigées en tenant compte du degré de dissociation électrolytique des solutions, la concordance peut être considérée comme satisfaisante.

IV.

Généralisation.

Ces quelques exemples suffisent, pensons-nous, pour montrer la simplicité de la méthode de discussion dont nous proposons l'emploi. Cette méthode est susceptible de s'appliquer avec autant de facilité à la Biologie qu'à la Physique ou à la Chimie. Nous en avons fait, par ailleurs (1), l'application à de nombreux phénomènes : dilatation ou compression des solides, liquides ou gaz : équilibre des fluides, absorption de la lumière; phénomènes de phosphorescence, ionisation par chocs, polarisation diélectrique et aimantation, radioactivité, vitesses de réaction, équilibres chimiques, règle des phases, évolution d'un système biologique, croissance d'un individu ou d'une population, action biologique des radiations, des antiseptiques ou des poisons, etc.

La relation de probabilités que nous avons énoncée et dont nous avons donné l'expression analytique, constitue un cas particulier d'un principe très général pouvant s'appliquer à la plupart des phénomènes.

L'établissement de ce principe nécessite la généralisation des notions de quantification et de probabilité. Nous avons publié cette généralisation dans une brochure [1] où sont exposées les définitions que nécessite la démonstration de ce principe universel.

Pour mettre en relief sa généralité d'application, nous avons montré que les principes particuliers qui régissent les diverses branches scientifiques : principes de moindre action, de la conservation de l'énergie ou de l'entropie, etc., ne sont que des cas particuliers de ce principe universel.

Les difficultés de publication ne nous ont guère permis de présenter, dans cette brochure, qu'une ébauche de la question, traitée d'ailleurs dans le cas particulier d'un système ne comprenant qu'une phase. Envisagée d'un point de vue plus élevé, cette étude amène à une généralisation de la règle des phases de Gibbs et donne des solutions générales des divers problèmes intéressant les systèmes de même variance.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] G. et J. A. Reboul, *Sciences expérimentales et probabilités*, Imprimerie de la Charité, Montpellier (1942).

Nous tenons gratuitement cette brochure à la disposition des personnes qu'elle peut intéresser.

[2] Les données numériques utilisées dans cet article sont tirées du Recueil de constantes de la Société française de Physique (1913).

CALCUL D'UN FOUR ÉLECTRIQUE A INDUCTION HAUTE FRÉQUENCE, A OSCILLATIONS ENTRETENUES

Par G. DE MONTAUD,

Ingénieur radio E.S.E.

Sommaire. — On décrit dans cet article une installation de chauffage par courants de haute fréquence, alimentée par lampes triodes et dont les caractéristiques sont prévues pour obtenir des oscillations dépourvues d'harmoniques. Cette installation de mesures est particulièrement adaptée à l'étude de la résistance apparente de corps géométriques placés dans un champ magnétique uniforme de fréquence élevée.

Pour poursuivre certaines expériences et recherches au « Laboratoire des Hautes températures » de l'Université de Paris, nous avons été amené à étudier un four à induction haute fréquence, à oscillations entretenues, fonctionnant avec un tube triode et satisfaisant aux conditions suivantes : oscillations nettement pures et stables, fonctionnement silencieux, souplesse suffisante permettant d'adapter l'installation à des charges très différentes.

La figure 1 représente le schéma du montage adopté.

La haute tension anodique est appliquée entre x et M; elle est fournie, à partir du réseau à 110 V, par un groupe redresseur comprenant le transformateur A et les diodes $BB'B''B'''$; un dispositif filtrant EC_r adoucit ses variations et la rend sensiblement continue. Le système oscillant étant branché entre les deux mêmes points x et M, la bobine de choc E' empêche les oscillations haute fréquence de se propager du côté tension continue et, par contre, le condensateur d'arrêt C_a interdit au courant continu le côté haute fréquence et prévient, par conséquent, la mise en court-circuit de l'installation, ainsi que tout danger d'électrocution, la tension moyenne du côté haute fréquence étant celle de la masse.

La tension anodique haute fréquence du tube à trois électrodes F est appliquée, entre d et f, à un circuit antirésonnant dont la bobine de self-induction L_1 constitue le primaire d'un transformateur haute fréquence à air T. Aux bornes du secondaire L_2 de ce transformateur est branché, entre e et e', un second circuit antirésonnant, que nous appellerons d'*utilisation*, car sa bobine de self-induction constitue la *bobine-four* L, refroidie par un système de circulation d'eau et à l'intérieur de laquelle *la charge* est introduite.

Nous savons que, pour obtenir un bon rendement, il faut que la résistance du circuit anodique soit

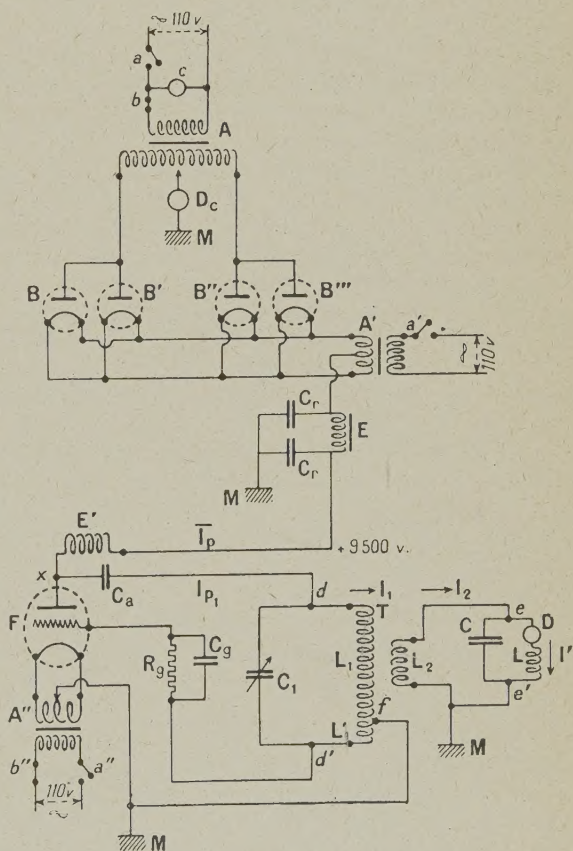


Fig. 1.

A, transformateur; B, B', B'', B''', rivolet redresseur; D_c, ampèremètre courant continu; A', A'', transformateurs de chauffage des filaments; E, C_r, filtre d'adoucissement; E', bobine de choc; F, triode; C_a, condensateur d'arrêt; *df*, circuit antirésonnant d'anode; C_1, condensateur variable; T, transformateur haute fréquence; L'_1, spires de réaction; *ee'*, circuit antirésonnant d'utilisation; C, condensateur; L, bobine-four; D, ampèremètre haute-fréquence; C_g, condensateur de grille; R_g, résistance de grille.

du même ordre de grandeur que celui de la résistance interne du tube; or, la résistance équivalente de la charge est considérablement plus petite que la résistance interne d'une triode et le courant nécessaire dans la bobine-four beaucoup plus élevé que le courant anodique que peut fournir une lampe. Le montage donne à l'installation une grande souplesse en permettant d'adapter convenablement la lampe, par transformations successives de l'énergie haute fréquence, aux conditions requises par la charge. Un autre avantage de ce dispositif est que seul le circuit du four est parcouru par des courants intenses.

Le montage adopté utilise, en outre, la propriété filtrante bien connue du circuit antirésonnant. L'impédance de celui-ci est maxima et se réduit, comme l'on sait, à une résistance pure pour des courants ayant sa fréquence propre d'oscillation; à l'intérieur du circuit antirésonnant l'intensité est, dans ce cas, maxima; les deux circuits antirésonnants que comprend le montage réalisent donc un double filtrage et éliminent pratiquement les harmoniques; les oscillations produites sont conséquemment sinusoïdales, condition nécessaire dans la plupart des expériences prévues.

La lampe fonctionne en auto-excitation; la tension de grille nécessaire pour maintenir les oscillations s'obtient en ajoutant quelques spires L'_1 à la bobine primaire du transformateur. De cette façon le courant du circuit antirésonnant d'anode produit, entre d' et f, une différence de potentiel à peu près en phase avec celle qui existe entre f et d. La réaction d'entretien est ainsi en phase avec le courant du circuit oscillant et la fréquence des oscillations produites est celle de résonance de ce circuit.

Les corps en expérience, cylindres ou disques de divers métaux, de dimensions différentes, varient avec chaque expérience ou chaque série d'expériences, donc la charge utile du four; les grandeurs électriques des éléments qui constituent l'installation, pour une charge, une fréquence et un rendement fixés, varient en conséquence. Nous nous proposons d'indiquer la méthode de calcul suivie pour leur détermination.

Calcul du fonctionnement à la sortie de la lampe triode. — Appelons f la fréquence et ω la pulsation des oscillations; soient respectivement L_1, L_2, M et α les selfs des bobines primaire et secondaire, le coefficient d'induction mutuelle de ces bobines et le rapport de transformation du transformateur haute fréquence T; R_1 la résistance propre ohmique, haute fréquence, du circuit antirésonnant d'anode et R_2 celle de la bobine secondaire du transformateur; R_a la résistance pure introduite entre e et e' dans le circuit secondaire par l'insertion du circuit antirésonnant d'utilisation.

On sait que [1] la self et la résistance équivalentes du circuit antirésonnant d'anode sont, respectivement, R_2 étant négligeable par rapport à R_a,

$$\Sigma = L_1 - \alpha^2 L_2, \qquad \text{(I)}$$

$$R_1 + \alpha^2(R_2 + R_a) \doteqdot R_1 + \alpha^2 R_a.$$

Par conséquent, la résistance pure équivalente au circuit antirésonnant d'anode, soit l'impédance du circuit anodique, est

$$R_p = \frac{\Sigma^2 \omega^2}{R_1 + \alpha^2 R_a}. \qquad \text{(II)}$$

On sait alors que

$$\alpha = \frac{M\omega}{\sqrt{(R_2 + R_a)^2 + L_2^2 \omega^2}} \doteqdot \frac{M\omega}{\sqrt{R_a^2 + L_2^2 \omega^2}}. \qquad \text{(III)}$$

Nous nous fixons, pour le coefficient de couplage du transformateur la valeur $k = 0{,}45$ (valeur vérifiée pour les bobines coaxiales que nous utilisons); donc

$$M = k\sqrt{L_1 L_2} = 0{,}45\sqrt{L_1 L_2}. \qquad \text{(IV)}$$

De (I), (III) et (IV) on déduit

$$0{,}8\alpha^2\omega^2 L_2^2 - 0{,}2\omega^2 \Sigma L_2 + \alpha^2 R_a^2 = 0,$$

équation du deuxième degré en L_2

$$L_2 = \frac{0{,}2\omega\Sigma \pm \sqrt{0{,}04\omega^2\Sigma^2 - 3{,}2\alpha^4 R_a^2}}{1{,}6\alpha^2\omega}.$$

Pour que cette valeur soit réelle il faut que

$$0{,}04\omega^2\Sigma^2 \geqq 3{,}2\alpha^4 R_a^2;$$

or, il est facile de voir que, pour obtenir un bon rendement, R_a doit être le plus grand possible; nous prendrons donc

$$0{,}04\omega^2\Sigma^2 = 3{,}2\alpha^4 R_a^2;$$

soit

$$\Sigma = 8{,}94\frac{\alpha^2 R_a}{\omega}. \qquad \text{(V)}$$

Avec cette condition

$$L_2 = 1{,}11\frac{R_a}{\omega}, \qquad \text{(VI)}$$

En substituant la valeur (V) de Σ dans (II), on a

$$R_p = \frac{80\alpha^4 R_a^2}{R_1 + \alpha^2 R_a}.$$

Cette égalité donne une équation du deuxième degré en R_a

$$R_a = \frac{R_p\left(1 + \sqrt{1 + 320\frac{R_1}{R_p}}\right)}{160\alpha^2}.$$

Exemple. — Expériences à la fréquence 2×10^5 c/s, avec un cylindre de plomb fondu de 2 cm de diamètre et 5 cm de hauteur. Résistivité $\rho = 116 \times 10^3$ U. E. M.

Étude de la charge. — La bobine-four est constituée par un solénoïde de 16 spires, de 10,65 cm de

hauteur et 4,1 cm de diamètre. Coefficient de self-induction $L' = 3{,}15\ \mu H$.

Donc le nombre de spires qui correspondent à la hauteur du cylindre est $n = 7{,}5$ et sa résistance, à la fréquence indiquée [2]

$$r = \frac{2\pi^2 d}{h}\sqrt{\rho f} = 1{,}2 \times 10^{-3}\ \Omega.$$

La résistance haute fréquence de la bobine-four, calculée par la formule de Butterworth, est

$$R' = 0{,}034\ \Omega.$$

Or, l'introduction du cylindre métallique augmente cette résistance (¹) de $n^2 r = 0{,}068\ \Omega$ (résistance de la charge). La résistance totale bobine-four-charge est

$$R = R' + n^2 r = 0{,}1\ \Omega.$$

Éléments de l'installation. — La self L' de la bobine-four est diminuée, du fait de l'introduction du cylindre, de $n^2 l = 0{,}45\ \mu H \left(l = \frac{\pi^2 d^2}{h} = 8 \cdot 10^{-8}\ \mu H,\right.$ self du cylindre$\left.\right)$, il en résulte

$$L = L' - n^2 l = 2{,}7\ \mu H.$$

Pour obtenir la fréquence indiquée ci-dessus, la capacité du circuit antirésonnant d'utilisation doit valoir $C = 235\ m\mu F$.

Les formules donnent

$$R_a = \frac{L^2\omega^2}{R} = 115\ \Omega, \qquad L_2 = 1{,}11\,\frac{R_a}{\omega} = 100\ \mu H.$$

Nous nous fixons, pour le rapport de transformation du transformateur haute fréquence, $\alpha = 1{,}25$ et nous estimons que $R_1 = 3\ \Omega$. On déduit en appliquant les formules (II), (V), (I) et (IV), respectivement

$$R_p = 14\,000\ \Omega; \qquad \Sigma = 1\,270\ \mu H;$$
$$L_1 = 1\,426\ \mu H; \qquad M = 171\ \mu H.$$

Fonctionnement de la triode. — Le système redresseur fournit à la triode une tension anodique continue de l'ordre de 9 500 V; le taux des variations admis est de 3 pour 100.

La triode est du type E — 1301 de la « Société française radioélectrique » dont la puissance d'entrée est de l'ordre de 3,5 kW.

Avec la tension anodique $V_p = 9\,500$ V, si l'on admet une « tension de déchet » d'un millier de volts (puisque la lampe fonctionne en *régime C*), on a, pour l'amplitude de la tension anodique haute fréquence,

$$V_{p1} = 8\,500\ \text{V}.$$

(¹) La bobine-four et le cylindre métallique peuvent être considérés, respectivement, comme le primaire et le secondaire d'un transformateur haute fréquence dont le rapport de transformation est n.

Puissance de sortie de la lampe

$$P_u = \frac{V_{p1}^2}{2R_p} = 2\,600\ \text{W}.$$

Amplitude du courant anodique haute fréquence

$$I_{p1} = \frac{V_{p1}}{R_p} = 0{,}6\ \text{A}.$$

Adoptons un rendement de la lampe $\eta = 0{,}8$; la puissance d'entrée sera $P_i = \frac{P_u}{\eta} = 3\,250$ W. Puissance dissipée : $W_d = 650$ W, valeur très inférieure à la normale admise par le constructeur (1500 W).

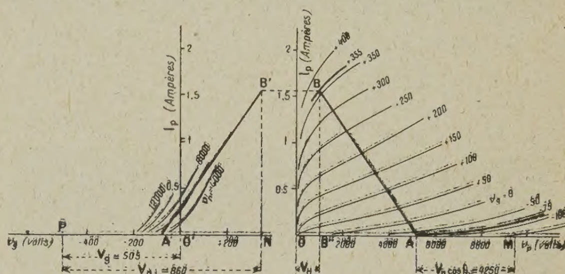


Fig. 2.

De

$$\eta = \frac{[\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0]\,V_{p1}}{2[\sin\theta_0 - \theta_0\cos\theta_0]\,V_p},$$

on déduit la valeur de l'angle d'annulation $\theta_0 = 60°$.

De

$$I_{p1} = \frac{\overline{I}_p[\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0]}{\sin\theta_0 - \theta_0\cos\theta_0},$$

on déduit la valeur du courant continu d'alimentation $\overline{I}_p = 0{,}34$ A.

La tension alternative qui correspond à l'angle d'annulation est (*fig.* 2, courbes caractéristiques de la lampe)

$$v_p = AM = V_{p1}\cos\theta_0 = 4\,250\ V,$$

et le courant s'annule au point A pour lequel $OA = V_p - v_p = 5\,250$ V.

Le point A correspond à une tension de grille de — 75 V. On peut donc fixer le point A' sur la figure. Le point B se trouve sur l'ordonnée BB'' qui correspond à la tension de déchet $V_d = 1\,000$ V.

D'un autre côté l'intensité du courant total maximum anodique

$$I_{pM} = I_{p1}\,\frac{\pi(1 - \cos\theta_0)}{\theta_0 - \sin\theta_0\cos\theta_0} = 1{,}54\ \text{A}.$$

Cette valeur détermine le point B'; le point B correspond en effet à une tension maxima positive de grille + 355 V.

Si l'on appelle V_{g1} l'amplitude de la tension alternative de grille, que doivent fournir les spires de



Fig. 3. — Intérieur de l'installation.

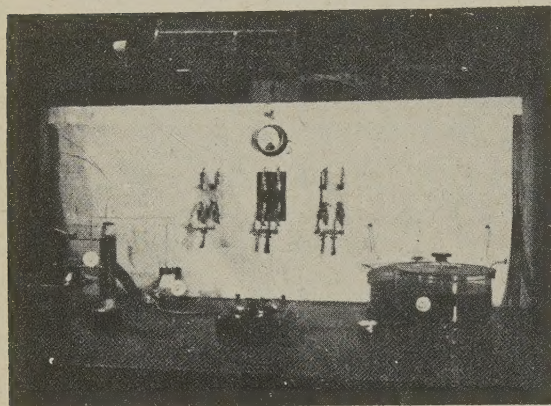


Fig. 4. — Table de manipulation.

réaction fd' (*fig.* 1), et V_g la tension de polarisation négative de grille, qui doit être obtenue au moyen de la résistance de grille R_g, on voit que

$$O'N = +355\ \text{V} = V_{g1} + V_g,$$
$$O'A' = -\ 75\ \text{V} = V_{g1}\cos 60° + V_g,$$

on déduit

$$V_g = O'P = -505\ \text{V} \qquad \text{et} \qquad V_{g1} = NP = 860\ \text{V}.$$

On peut donc tracer, sur la figure 2, les caractéristiques dynamiques AB et $A'B'$.

Courants primaires et secondaires. — L'impédance de la bobine primaire df est

$$Z_1 = \sqrt{(R_1 + \alpha^2 R_a)^2 + (L_1 - \alpha^2 L_2)^2\omega^2} = 1605\ \Omega.$$

Amplitude du courant primaire

$$I_1 = \frac{V_{p1}}{Z_1} = 5,3\ \text{A}.$$

Amplitude du courant secondaire

$$I_2 = \alpha I_1 = 6,62\ \text{A}.$$

Valeurs efficaces

$$I_{1ef} = 3,75\ \text{A}, \qquad I_{2ef} = 4,7\ \text{A}.$$

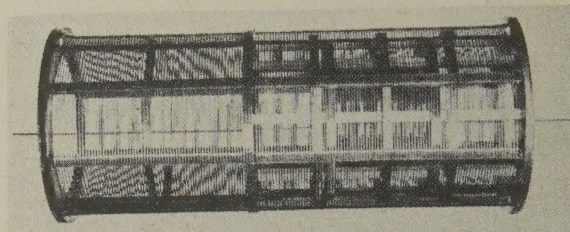


Fig. 5. — Transformateur haute fréquence à air.

Courant dans la bobine-four. — En appelant V_{aef} la tension efficace entre e et e'

$$V_{aef} = R_a I_{2ef} = 540\ \text{V}.$$

Impédance de la bobine-four

$$Z = \sqrt{R^2 + L^2\omega^2} = 3,4\ \Omega.$$

Courant efficace dans la bobine-four

$$I'_{ef} = \frac{V_{aef}}{Z} = 158\ \text{A}.$$

Puissance dépensée dans le cylindre métallique, soit puissance vraiment utile,

$$P_0 = n^2 r I'^2_{ef} = 1\,700\ \text{W}.$$

Comme la puissance d'entrée dans la lampe est $P_i = 3\,250$ W, il résulte que le rendement global de l'installation avec le plomb fondu est de l'ordre de 50 pour 100.

Les figures 3, 4 et 5 font voir l'intérieur de l'installation, la table de manipulation et le transformateur haute fréquence à air. Les lettres de ces figures correspondent à celles de la légende (*fig.* 1).

Manuscrit reçu le 6 janvier 1944.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] Mesny, *Radioélectricité générale*, t. **1**.
[2] G. Ribaud, La théorie du chauffage par courants induits à haute fréquence J.) *de Physique*, novembre 1932, p. 537-554).